

THESES

présentées

à l'Université Claude Bernard

de Lyon

pour obtenir

le Grade de Docteur es Sciences mathématiques

par

René PUPIER

1-ère Thèse - Méthodes fonctorielles en Topologie Générale

2-ème Thèse - Propositions données par l'Université

soutenues le 25 février 1971 devant la commission d'examen

MM. J. BRACONNIER, Président

H. BUCHWALTER

J. COLMEZ

E. COMBET

H. HOGBE-NLEND, Examineurs

THESES

présentées

à l'Université Claude Bernard

de Lyon

pour obtenir

le Grade de Docteur es Sciences mathématiques

par

René PUPIER

1-ère Thèse - Méthodes fonctorielles en Topologie Générale

2-ème Thèse - Propositions données par l'Université

soutenues le 25 février 1971 devant la commission d'examen

MM. J. BRACONNIER, Président

H. BUCHWALTER

J. COLMEZ

E. COMBET

H. HOGBE-NLEND, Examineurs

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD

LYON

Président : M. le Professeur J. BOIDIN

1er Vice-Président : M. R. TOURAINÉ, Maître de Conférences agrégé

2ème Vice-Président : M. P. PONCET, Maître-Assistant

3ème Vice-Président : M. D. SETTELEN, Etudiant.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

UNITES

DIRECTEURS

U.E.R. médicale Grange-Blanche

M. le Professeur D. GERMAIN

U.E.R. médicale Alexis-Carrel

M. R. TOURAINÉ, Maître de Conférences
agrégé

U.E.R. médicale LYON-Nord

M. le Professeur A. BERTOYE

U.E.R. médicale LYON-Sud-Ouest

M. le Professeur L. TOLOT

U.E.R. des Sciences pharmaceutiques

M. M. CARRAZ, Maître de Conférences
agrégé

U.E.R. des Techniques de Réadaptation

M. le Professeur P. MOUNIER-KÜHN

U.E.R. de Biologie humaine

M. J.C. CZYBA, Maître de Conférences
agrégé

Institut Régional d'Education

Physique et Sportive

M. J. SAPIN, Professeur E.P.S.

U.E.R. de Mathématiques

M. le Doyen J. BRACONNIER

U.E.R. de Physique

M. le Professeur M. DUFAY

U.E.R. de Chimie et Biochimie

Mle. le Professeur D. GAUTHERON

U.E.R. des Sciences de la Nature

M. le Professeur L. DAVID

U.E.R. de Biodynamique et Psycho-
pédagogie

M. le Professeur J. CHANEL

U.E.R. de Physique Nucléaire

M. le Professeur A. SARAZIN

Institut Universitaire de Techno-
logie I

M. le Professeur L. FEUVRAIS

Institut Universitaire de Techno-
logie II

M. J. GALLET

Observatoire

M. le Professeur J.H. BIGAY

Secrétaire Général : M. N...

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Jean Braconnier tant pour les connaissances qu'il m'a apportées, que pour les conditions de travail qu'il m'a offertes. Sans son action constante depuis de nombreuses années à la Faculté des Sciences de Lyon, la recherche mathématique n'aurait pu s'y développer comme elle l'a fait.

M. Henri Buchwalter a bien voulu m'accepter dans son équipe alors qu'une partie de ce travail était déjà élaborée. La seconde partie n'eut sans doute pas vu le jour sans les idées exprimées dans sa thèse et ses travaux ultérieurs. De nombreuses améliorations sont dues à ses conseils. Je lui en garde une très profonde reconnaissance.

MM. J. Colmez, E. Combet et H. Hogbe-Nlend m'ont fait l'honneur de juger ce travail; qu'ils en soient ici vivement remerciés.

On essaye dans ce travail d'utiliser systématiquement les techniques catégoriques pour résoudre (ou pour poser) des problèmes de topologie générale. Il va sans dire que les techniques proprement topologiques ne sont pas abandonnées pour autant, mais elles interviennent souvent au niveau de la vérification de certains axiomes auxquels la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques satisfait.

Dans un premier chapitre, on dégage dans des catégories satisfaisant à quelques axiomes élémentaires, des résultats ou des notions rendant compte de phénomènes connus des espaces topologiques, en particulier des propriétés des espaces localement compacts (localement quasi-compacts de Bourbaki) et des k -spaces de J.L.Kelley (nommés espaces de Kelley dans [G.Z]). Le théorème fondamental consiste à remarquer que si le foncteur $T \mapsto T \times X$ pour un objet donné X d'une telle catégorie possède un adjoint à droite, cet adjoint se concrétise sous la forme de l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ "structuré" dans la catégorie que l'on étudie. Un objet X qui possède cette propriété ($T \mapsto T \times X$ possède un adjoint à droite) est appelé objet convenable.

On définit d'autre part la notion d'objet de Kelley d'une catégorie $\mathcal{C}$ relatif à une sous-catégorie $\mathcal{K}$. Les axiomes choisis pour la catégorie $\mathcal{C}$ ne permettent pas de rendre compte des struc-



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552624_0008

tures algébriques et il faudrait sans doute reprendre cette question afin de couvrir les notions d'espace vectoriel localement convexe de Kelley et de k -groupe. On donne enfin les rapports qui existent entre objets de Kelley et objets convenables.

La deuxième partie examine de façon détaillée la situation précédente dans diverses sous-catégories de la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques. Entre autres on cherche à montrer la conjecture suivante : si le foncteur $T \mapsto T \times X$ possède un adjoint à droite dans $\mathcal{C}$, l'espace X est localement compact. Bien qu'une démonstration générale n'ait pu être trouvée, on montre que cette conjecture est vérifiée, en particulier, si X est un espace séparé. On établit des propriétés du foncteur $Y \mapsto \mathcal{C}_c(X, Y)$ (l'ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ muni de la topologie de convergence quasi-compacte) afin d'étudier cette conjecture dans le cas non séparé, et l'on montre que ce foncteur possède un adjoint à gauche qu'on peut identifier au foncteur $T \mapsto T \times_{\underline{a}} X$, où $\underline{a}$ désigne une topologie plus fine que la topologie produit ordinaire. On ne peut caractériser dans tous les cas cette topologie $\underline{a}$ comme topologie finale associée à un ensemble de sous-espaces du produit direct (topologique) $T \times X$; on peut le faire cependant pour une classe assez vaste d'espaces X (qui contient entre autre les espaces séparés).

On fait ensuite le lien entre les objets de Kelley de la catégorie $\mathcal{CR}$ des espaces complètement réguliers et les compactologies de H. Buchwalter; on généralise à cette occasion le théorème de S. Warner sur la complétude de $\mathcal{C}_c(T)$. Cette généralisation sera d'ailleurs utile dans la troisième partie.

Celle-ci est en quelque sorte une résultante des notions mises en oeuvre dans les deux premières parties, et des notions nouvelles introduites par H. Buchwalter dans sa Thèse. On reprend complètement un résultat déjà publié en commun, caractérisant la complétion universelle d'un espace complètement régulier, pour obtenir une construction du complété séparé d'un espace uniforme (séparé ou non) au moyen de formes linéaires particulières sur l'espace $\mathcal{U}(T)$ des applications à valeurs réelles, uniformément continues. Ceci redonne dans les trois cas classiques, la complétion universelle, la replétion et la compactification de Stone-Čech en termes de caractères.

On définit ensuite la notion d'espace précompactologique qui généralise celle d'espace compactologique et permet d'introduire de façon naturelle l'idée de borné dans un espace complètement régulier. On montre comment certains espaces précompactologiques jouent, vis à vis des espaces uniformes séparés, un rôle analogue à celui des espaces topologiques (complètement réguliers). Cependant cette notion de précompactologie n'a été avancée ici qu'en vue de certaines applications, et méritera sans doute une étude plus détaillée ultérieure, en particulier en ce qui concerne les précompactologies vectorielles (on donne en annexe quelques précisions sur la famille des structures uniformes séparées compatibles avec une précompactologie complètement régulière). Notons en passant qu'on utilise essentiellement les écarts pour définir les structures uniformes.

La fin de cette troisième partie est consacrée à l'étude de la commutation du foncteur θ de c -replétion et du foncteur ν de replétion au produit direct. On établit des conditions nécessaires et suffisantes pour certains types d'espaces (espaces hypobornologiques) qui donnent comme cas particuliers une partie des résultats de Glicksberg-Frolik-Tamano relatifs à la compactification de Stone-Čech d'un produit, et le résultat de W.W. Comfort sur la replétion d'un produit.

Notations. Les catégories utilisées sont notées par une ou plusieurs lettres cursives : $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{ER}$, ... Pour deux objets T et X d'une telle catégorie $\mathcal{C}$, l'ensemble des morphismes de T dans X sera noté $\mathcal{C}(T, X)$. La catégorie des ensembles sera désignée par la lettre $\mathcal{E}$.

Pour une adjonction $(\underline{L}, \underline{S})$ entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ ($\underline{L}$ adjoint à gauche à $\underline{S}$) on notera les différents morphismes de la façon suivante :

$$\varphi : \mathcal{E}(\cdot, \underline{S}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\underline{L}, \cdot)$$

$$\psi : \mathcal{C}(\underline{L}, \cdot) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\cdot, \underline{S})$$

$$\Phi : \underline{L} \circ \underline{S} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

avec $\Phi(X) = \varphi(1_{\underline{S}(X)})$

$$\psi : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow \underline{S} \circ \underline{L}$$

avec $\psi(A) = \psi(1_{\underline{L}(A)})$

Les autres notations sont classiques en théorie des catégories, sauf peut-être la notation $[f, g]$ pour le morphisme canonique de T dans $X \times Y$, associé à deux morphismes $f : T \rightarrow X$ et $g : T \rightarrow Y$.

Contenu.

1. <u>Les données catégoriques</u>	p.	1
1.0. Définition des catégories de type topologique	p.	1
1.1. Objets admissibles et objets convenables	p.	4
1.2. Objets de Kelley relatifs à une sous-catégorie	p.	10
1.3. Foncteurs quasi-représentables; objets $\mathcal{K}$ -convenables	p.	15
2. <u>Espaces convenables et espaces de Kelley</u>	p.	21
2.1. Les théorèmes d'Arens	p.	24
2.2. Les objets de Kelley dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}\mathcal{V}$	p.	30
2.3. Le foncteur $\mathcal{C}_c(X, .)$	p.	36
2.4. Les espaces de Kelley de la catégorie $\mathcal{C}f$	p.	47
2.5. Les espaces fonctionnellement séparés et les espaces complètement réguliers	p.	54
2.6. Compactologies et espaces de Kelley dans $\mathcal{C}\mathcal{R}$	p.	61
3. <u>Structures uniformes et foncteurs.</u>	p.	68
3.1. Complétion et caractères	p.	70
3.2. Précompactologies	p.	79
3.3. Topologies et précompactologies	p.	85
3.4. Un théorème à tiroirs sur les parties équi- continues de $\mathcal{C}(T \times X)$	p.	89
3.5. Le foncteur Θ de c -replétion	p.	97
3.6. Les foncteurs de replétion	p.	110
<u>Annexe : Ecartis et précompactologies</u>	p.	114
Bibliographie	p.	118

Corrections.

page 17, ligne 9 du bas, lire : $e_{YX}(\varphi_K(i_K) \cdot (k \times 1_X), x)$

page 20, lire :

1.3.7. Corollaire.- Soit X un objet convenable; soit $\underline{D} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur adjoint à droite à π_X . Le foncteur $T \mapsto \mathcal{C}_{X\epsilon}(T_X X, Y)$ de $\mathcal{K}_\epsilon$ dans $\mathcal{C}$ est représentable pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ et a pour représentant $\underline{k}_\bullet \underline{D}(Y)$.

page 59, ligne 5, lire : Tout $x \in X$ possède ...

page 74, ligne 6 du bas, lire : démonstration ...

page 77, ligne 4, lire : $\lambda X = X$, ...

page 91, ligne 12, lire : une partie H ...

page 93, ligne 3, lire : pour tout $x \in B$ et ...

page 94, ligne 4 du bas, lire : $f' \Leftrightarrow g' \Leftrightarrow j$...

ligne 3 du bas, lire : $i \Leftrightarrow j \Leftrightarrow h'$...

page 95, ligne 3, lire : $e \Leftrightarrow j$...

page 96, ligne 8, lire : H est uniformément équicontinu ...

page 98, ligne 7, lire : pour certains types d'espaces.

page 101, ligne 6 du bas, lire : voisinage ;..

page 103, ligne 3, lire : montrent les ...

ligne 5 du bas, lire : si $((T, A), (X, B))$ vérifie ...

page 111, ligne 11 du bas, lire : complètement régulier ...

page 113, ligne 5 du bas, lire : proposition ...

ch. I. Les données catégoriques.

1.0. Définition des catégories de type topologique.

Dans cette section on trouvera seulement les premiers éléments d'une telle définition. Au fur et à mesure des besoins les catégories utilisées seront particularisées par des axiomes supplémentaires. Une étude exhaustive serait sans doute d'un moindre intérêt, bon nombre de définitions n'étant donné qu'en vue des applications.

N'ayant pas à utiliser de catégories de foncteurs, nous employons une théorie "naïve" des catégories, sans faire référence à une théorie particulière des ensembles.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On exprimera tout d'abord son caractère concret en supposant qu'il existe un foncteur (covariant) fidèle $\underline{S}$ de $\mathcal{C}$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles. De plus, on postule l'existence d'un objet final P , appelé point, satisfaisant à la propriété :

(P) Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur $\underline{S}$ définit une bijection de $\mathcal{C}(P, X)$ sur $\mathcal{E}(\underline{S}(P), \underline{S}(X))$.

On désignera toujours par ω_X l'unique morphisme $X \rightarrow P$.

Enfin la catégorie $\mathcal{C}$ est complète à droite. Ces données

primitives seront valables dans tout le chapitre. Elles seront vérifiées par les diverses catégories d'espaces topologiques que l'on étudiera dans la suite. Par contre elles seront en défaut pour les catégories d'espaces uniformes (cf. ch. 3).

1.0.1. Théorème.— Pour une catégorie $\mathcal{C}$, complète à droite, et

un foncteur fidèle $\underline{S} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{Z}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) le foncteur $\underline{S}$ possède un adjoint à gauche $\underline{L}$, il est représentable, et un représentant P de $\underline{S}$ est tel que $\underline{L}_0 \underline{S}(P) \simeq P$, et pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X, P) \neq \emptyset$.
- b) la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet final P , satisfaisant à la condition (P), et $\underline{S}(P) \neq \emptyset$.

Démonstration : l'adjonction $\mathcal{C}(\underline{L}(A), X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(A, \underline{S}(X))$, pour $A = \underline{S}(P)$ implique $\mathcal{C}(P, X) \simeq \mathcal{Z}(\underline{S}(P), \underline{S}(X))$; en posant $X = P$, il vient :

$$\underline{S}(P) \simeq \mathcal{C}(P, P) \simeq \mathcal{Z}(\underline{S}(P), \underline{S}(P))$$

et par suite $\underline{S}(P)$ est réduit à un élément. Comme $\underline{S}$ est fidèle, $\mathcal{C}(X, P)$ s'identifie à une partie non vide de $\mathcal{Z}(\underline{S}(X), \underline{S}(P))$ et P est un objet final.

Réciproquement, on montre d'abord que sous l'hypothèse b), $\underline{S}(P)$ possède un seul élément : en effet, $\mathcal{C}(P, P) = \{1_P\}$ est en bijection avec $\mathcal{Z}(\underline{S}(P), \underline{S}(P))$, donc $\text{card}(\underline{S}(P)) \leq 1$. On a alors l'isomorphisme naturel $\underline{S}(X) \simeq \mathcal{Z}(\underline{S}(P), \underline{S}(X)) \simeq \mathcal{C}(P, X)$, ce qui montre que $\underline{S}$ est représentable.

Soit A un ensemble et soit $P^{(A)}$ la somme directe de $\text{card}(A)$

copies de P ; soit $u : P^{(A)} \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$, et soient $e_a : P \rightarrow P^{(A)}$ les morphismes canoniques. L'application $u \mapsto (a \mapsto u.e_a)$ est évidemment une injection de $\mathcal{C}(P^{(A)}, X)$ dans $\mathcal{E}(A, \underline{S}(X))$; on vérifie aisément que c'est une bijection naturelle, ce qui montre que $\underline{L} : A \mapsto P^{(A)}$ est un adjoint à gauche à $\underline{S}$, tel que $\underline{L}_0 \underline{S}(P) \simeq P$.

1.0.2. Corollaire.- L'objet P est un coséparateur $([S_1])$.

1.0.3. Corollaire.- Le foncteur $\underline{S}$ commute aux limites à gauche
| et conserve les monomorphismes.

En particulier, si le produit $T \times X$ existe, pour deux objets de $\mathcal{C}$, on a $\underline{S}(T \times X) \simeq \underline{S}(T) \times \underline{S}(X)$; d'autre part on dira quelquefois que les monomorphismes de $\mathcal{C}$ sont "injectifs".

Dans la suite on identifiera toujours $\underline{S}$ et $\mathcal{C}(P, .)$, ce qui présente peu d'intérêt pour les objets, mais permet d'écrire l'application $\underline{S}(f)$, pour $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ et $x \in \underline{S}(X)$, sous la forme $\underline{S}(f)(x) = f.x$.

Pour terminer ces préliminaires faisons encore deux remarques :

1.0.4. Proposition.- Sous les hypothèses du théorème 1.0.1 les

| propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\underline{L}$ est pleinement fidèle;
- b) le morphisme fonctoriel $\Psi : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow \underline{S}_0 \underline{L}$ est un isomorphisme;
- c) les seuls morphismes de P dans $\underline{L}(A)$ sont les morphismes canoniques e_a .

L'équivalence $a) \Leftrightarrow b)$ est classique (cf. e.g. [G.Z]). Avec l'identification ci-dessus, $\Psi_A : A \rightarrow \underline{S}_0 \underline{L}(A)$ n'est autre que l'application $a \mapsto e_a$, ce qui montre que $b)$ est équivalent à $c)$.

Sous les conditions équivalentes de 1.0.4, on dira que $\underline{L}(A)$ est l'objet discret de support A .

Enfin on appellera évaluation, notée e_{YX} , l'application de $\mathcal{C}(X,Y) \times \underline{S}(X)$ dans $\underline{S}(Y)$ définie par $e_{YX}(f,x) = f.x$. Notons que c'est la restriction à $\mathcal{C}(X,Y) \times \underline{S}(X)$ de l'évaluation classique de $\mathcal{C}(\underline{S}(X), \underline{S}(Y)) \times \underline{S}(X)$ dans $\underline{S}(Y)$, quand on identifie $\mathcal{C}(X,Y)$ à son image par $\underline{S}$.

1.1. Objets admissibles et objets convenables.

Le foncteur $\underline{S}$ jouant le rôle d'un foncteur "oubli", il convient de pouvoir comparer deux objets de $\mathcal{C}$ qui ont le "même ensemble sous-jacent". De façon précise :

1.1.1. Définition.— Etant donnés deux objets X et X' et un ensemble E , tels qu'il existe deux bijections $\varphi : \underline{S}(X) \rightarrow E$ et $\varphi' : \underline{S}(X') \rightarrow E$, on dit que le triplet (X, E, φ) est plus fin que le triplet (X', E, φ') s'il existe un morphisme $u : X \rightarrow X'$ tel que $\varphi' \circ \underline{S}(u) = \varphi$.

La complexité apparente de cette définition provient de l'impossibilité de définir "l'ensemble sous-jacent" au moyen du seul foncteur $\underline{S}$ qui n'est connu qu'à un isomorphisme fonctoriel près. On déduit immédiatement de cette définition que u est un bimorphisme, et de plus, si (X', E, φ') est également plus fin que (X, E, φ) , alors X et X' sont isomorphes.

Soit maintenant F un objet de $\mathcal{C}$, tel qu'il existe une injection $\iota : \underline{S}(F) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ pour deux objets X et Y de $\mathcal{C}$; on suppose de plus que $F \star X$ existe.

1.1.2. Définition.- On dit que le couple (F, ι) est admissible relativement à X et Y , s'il existe un morphisme $u : F \star X \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \underline{S}(F) \star \underline{S}(X) & \xrightarrow{\underline{S}(u)} & \underline{S}(Y) \\ \downarrow \iota \star 1_{\underline{S}(X)} & & \uparrow e_{YX} \\ \mathcal{C}(X, Y) \star \underline{S}(X) & & \end{array}$$

En particulier si ι est une bijection, on dira que (F, ι) est admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

Notons que $P \star X$ existe et est isomorphe à X , pour tout objet X de $\mathcal{C}$; on désigne par π_X l'application $f \mapsto f \star 1_X$ de $\underline{S}(F)$ dans $\mathcal{C}(X, F \star X)$ (c'est la restriction à $\mathcal{C}(P, F) = \underline{S}(F)$ d'un foncteur encore noté π_X , que nous aurons l'occasion de rencontrer dans la suite). Enfin, pour $u \in \mathcal{C}(F \star X, Y)$, on note u^T l'application $g \mapsto u \cdot g$, où $g \in \mathcal{C}(T, F \star X)$.

1.1.3. Proposition.- Le couple (F, ι) est admissible relativement à X et Y , ssi il existe $u : F \star X \rightarrow Y$ tel que $\iota = u^X \circ \pi_X$.

Remarquons d'abord que si $f \in \underline{S}(F)$ et $x \in \underline{S}(X)$, on a :

$$\begin{aligned} e_{YX} \circ ((u^X \circ \pi_X) \star 1_{\underline{S}(X)})(f, x) &= e_{YX}(u^X \circ \pi_X(f), x) \\ &= u \cdot (f \star 1_X) \cdot x \\ &= u \cdot [f, x] \\ &= \underline{S}(u)(f, x) \end{aligned}$$

et si $u^X \circ \pi_X$ est injectif, le couple $(F, u^X \circ \pi_X)$ est admissible. Réciproquement, si (F, ι) est admissible, il existe $u : F \star X \rightarrow Y$ tel que :

$$u.(f \star 1_X).x = \underline{S}(u)(f, x) = e_{YX}(\iota(f), x) = \iota(f).x$$

et comme P est un coséparateur, $u^X \circ \pi_X = \iota$.

Il est facile de vérifier alors que l'application $u^{T \star X} \circ \pi_X : g \mapsto u.(g \star 1_X)$ de $\mathcal{C}(T, F)$ dans $\mathcal{C}(T \star X, Y)$ est un monomorphisme fonctoriel.

1.1.4. Lemme.- Supposons $\underline{L}$ pleinement fidèle. Soient X et Y deux

objets de $\mathcal{C}$, et $A = \mathcal{C}(X, Y)$. Si $(\underline{L}(A) \star X; e'_f)$, où $e'_f = [e_f \cdot \omega_X, 1_X]$, représente la somme directe $X^{(A)}$, le couple $(\underline{L}(A), \bar{\psi}_A^1)$ est admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

En effet, soit $u : \underline{L}(A) \star X \rightarrow Y$ défini par les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow e'_f & \searrow f & \\ \underline{L}(A) \star X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \underline{S}(u)(e_f, x) &= u.[e_f, x] = u.e'_f.x = f.x = e_{YX}(f, x) \\ &= e_{YX} \circ (\bar{\psi}_A^1 \star 1_{\underline{S}(X)})(e_f, x) \end{aligned}$$

Le lemme précédent exprime, dans le cas des espaces topologiques, que la topologie discrète sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est admissible. On verra que pour les objets X que nous étudierons, la propriété sur $\underline{L}(A) \star X$ sera vérifiée pour tout objet Y ($A = \mathcal{C}(X, Y)$).

1.1.5. Proposition.- Soit (F, ι) un couple admissible, relativement à X et Y , et soit $E = \iota(\underline{S}(F))$; si (F', E, ι') est plus fin que (F, E, ι) , alors (F', ι') est admissible (relativement à X et Y).

Cela résulte immédiatement du diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{S}(F') \times \underline{S}(X) & \xrightarrow{\underline{S}(v) \times 1_{\underline{S}(X)}} & \underline{S}(F) \times \underline{S}(X) & \xrightarrow{\underline{S}(u)} & \underline{S}(Y) \\
 & \searrow \iota' \times 1_{\underline{S}(X)} & \downarrow \iota \times 1_{\underline{S}(X)} & \nearrow e_{YX} & \\
 & & \mathcal{C}(X, Y) \times \underline{S}(X) & &
 \end{array}$$

1.1.6. Corollaire.- Si $\underline{L}$ est pleinement fidèle et si (F, ι) est admissible relativement à X et Y , alors $(\underline{L}_* \underline{S}(F), \iota_* \bar{\psi}_{\underline{S}(F)}^1)$ est admissible.

On suppose maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ possède des produits directs, au moins dans le cas des familles finies d'objets, et, pour un objet donné X , on désigne par π_X le foncteur $T \mapsto T \times X$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.

1.1.7. Définition.- On dit qu'un objet X de $\mathcal{C}$ est Y-convenable pour un objet Y de $\mathcal{C}$, si le foncteur $T \mapsto \mathcal{C}(\pi_X(T), Y)$ est représentable. S'il est représentable pour tout objet Y , autrement dit si π_X possède un adjoint à droite, on dit que X est un objet convenable.

On rappelle que E.Spanier ($[S_2]$) dit qu'une topologie τ sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est convenable si, pour tout espace topologique T , il existe une bijection entre $\mathcal{C}(T \times X, Y)$ et $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_\tau(X, Y))$, cette bijection étant assurée par "the exponential mapping" ; on a

fait glisser la propriété à l'espace X lui-même, en évitant l'a priori qui consiste à imposer le représentant. On va voir, en fait, que dans les catégories de type topologique, le représentant du foncteur $\mathcal{C}(\pi_X(.), Y)$, s'il existe, est nécessairement de la forme " $\mathcal{C}_T(X, Y)$ ", généralisant le lemme 5.1 de $[S_2]$.

Dans la pratique on se restreindra souvent à des sous catégories de $\mathcal{C}$; par exemple, si $\mathcal{C}$ est la catégorie des espaces topologiques et $\mathcal{CS}$ celle des espaces séparés, il n'est pas équivalent a priori de dire qu'un espace séparé X est convenable dans $\mathcal{C}$ ou convenable dans $\mathcal{CS}$.

1.1.8. Théorème.- Soit X un objet Y -convenable et soit $\underline{D}(Y)$

le représentant du foncteur $\mathcal{C}(\pi_X(.), Y)$. Le couple $(\underline{D}(Y), \varphi_{YP})$ est admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$. De plus, si (F, ι) est un autre couple admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$, le triplet $(F, \mathcal{C}(X, Y), \iota)$ est plus fin que $(\underline{D}(Y), \mathcal{C}(X, Y), \varphi_{YP})$.

On utilise dans ce théorème les notations de l'adjonction (cf. Introduction) :

$$\varphi_{YP} : \mathcal{C}(P, \underline{D}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(\pi_X(P), Y)$$

$$\text{i.e.} \quad \varphi_{YP} : \underline{S}(\underline{D}(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, Y).$$

Preuve : soient $d \in \underline{S}(\underline{D}(Y))$, $x \in \underline{S}(X)$ et $\phi_Y = \varphi(1_{\underline{D}(Y)})$ qui est un morphisme de $\underline{D}(Y) \times X$ dans Y . On a :

$$\begin{aligned} \underline{S}(\phi_Y)(d, x) &= \phi_Y.[d, x] = \phi_Y.(d \times 1_X).x = \varphi_{YP}(d).x \\ &= e_{YX}(\varphi_{YP}(d), x), \end{aligned}$$

ce qui ne fait que traduire la fonctorialité de φ pour $T = P$ et $T = \underline{D}(Y)$, en identifiant $P \times X$ à X (cf. p.5).

Si (F, ι) est un couple admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$, soit $u : F \times X \rightarrow Y$, tel que $\underline{S}(u) = e_{YX} \circ (\iota \times 1_{\underline{S}(X)})$. Posons $v = \varphi_{YF}(u)$; on a, pour $f \in \underline{S}(F)$:

$$\begin{aligned}\varphi_{YP}(\underline{S}(v)(f)) &= \varphi_{YP}(v.f) = \varphi_{YF}(v).(f \times 1_X) \\ &= u.(f \times 1_X) = \iota(f)\end{aligned}$$

d'après 1.1.3, ce qui achève la démonstration.

1.1.9. Corollaire.- Si X est un objet convenable et si le foncteur $\underline{L}$ est pleinement fidèle, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, le couple $(\underline{L}(\mathcal{C}(X, Y)), \bar{\Psi}_{\mathcal{C}(X, Y)}^1)$ est admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

Notons que ce résultat est conséquence, soit du théorème précédent et de la proposition 1.1.5, soit de la définition des objets convenables (π_X commute aux limites à droite, donc $\underline{L}(A) \times X \simeq X^{(A)}$, pour tout ensemble A) et du lemme 1.1.4.

Par ailleurs on peut remarquer, qu'avec les identifications nécessaires, l'adjonction :

$$\psi : \mathcal{C}(\pi_X(.), .) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(., \underline{D}(.))$$

lorsqu'elle existe, se transporte sur l'adjonction ensembliste :

$$\psi^{\mathcal{E}} : \mathcal{E}(\pi_A(.), .) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(., \mathcal{E}(A, .)).$$

Le détail de la démonstration se résume, pour le morphisme φ , dans le diagramme suivant, où $A = \underline{S}(X)$, $B = \underline{S}(Y)$, $C = \underline{S}(T)$:

$$\begin{array}{ccccc} C \times A & \xrightarrow{\underline{S}(v) \times 1_A} & \underline{S} \circ \underline{D}(Y) \times A & & \\ & \searrow \varphi_{YP} \times 1_A & \downarrow & \searrow \underline{S}(u) & \\ & & \mathcal{C}(X, Y) \times A & \xrightarrow{e_{YX}} & B \\ & \searrow \underline{S} \times 1_A & \downarrow & \nearrow e_{BA} & \\ & & \mathcal{E}(A, B) \times A & & \end{array}$$

où v est un morphisme quelconque de T dans $\underline{D}(Y)$. Autrement dit pour tout $f : T \times X \rightarrow Y$, on a $\underline{S}(\Psi(f)) = \Psi^{\mathcal{E}}(\underline{S}(f))$. On en déduit le théorème fondamental :

1.1.10. Théorème.- Soit X un objet convenable; soient $f : T \rightarrow Z$ et $h : T \times X \rightarrow Y$ deux morphismes de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe une application $u : \underline{S}(Z \times X) \rightarrow \underline{S}(Y)$ avec $u \circ \underline{S}(f \times 1_X) = \underline{S}(h)$; alors

$$\underline{S}(\Psi(h)) = \Psi^{\mathcal{E}}(u) \circ \underline{S}(f).$$

Pour terminer cette section on citera le fait suivant :

1.1.11. Proposition.- Tout produit fini d'objets convenables est convenable.

1.2. Objets de Kelley relatifs à une sous-catégorie.

Soit maintenant $\mathcal{K}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(K_1) P est un objet de $\mathcal{K}$;

(K_2) toute somme directe finie d'objets de $\mathcal{K}$ est un objet de $\mathcal{K}$;

(K_3) $\mathcal{K}$ est saturée à droite, autrement dit un épimorphisme de $\mathcal{E}$ qui a pour source un objet de $\mathcal{K}$, a pour but un objet isomorphe à un objet de $\mathcal{K}$, et de plus, un épimorphisme dans $\mathcal{K}$ est également épique dans $\mathcal{E}$ (cf. [P_1]).

On suppose pour toute la suite de ce chapitre que $\mathcal{E}$ est localement et colocalement petite. Ainsi tout morphisme de $\mathcal{E}$ possède une décomposition triangulaire ([P_1]). Enfin les conditions (K_2) et (K_3) impliquent que $\mathcal{K}$ est stable par limites à droite finies.

1.2.1. Proposition.- Les sous-objets d'un objet X de $\mathcal{C}$ dont les sources sont des objets de $\mathcal{K}$, forment un ensemble ordonné par "inclusion" et filtrant à droite.

Soit $i_C : C \rightarrow X$ et $i_{C'} : C' \rightarrow X$ deux tels sous-objets; la somme directe $C \sqcup C'$ appartient à $\mathcal{K}$, et le morphisme canonique $C \sqcup C' \rightarrow X$ a une décomposition triangulaire

$$C \sqcup C' \rightarrow C'' \rightarrow X$$

où C'' est un objet de $\mathcal{K}$ d'après (K_3) .

On notera $\mathcal{K}(X)$ la petite sous-catégorie de $\mathcal{C}$ formée par les sous-objets de X "appartenant" à $\mathcal{K}$, les morphismes étant les injections canoniques. On désigne par $\underline{k}(X) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur injection. Posons $\underline{k}X = \varinjlim \underline{k}(X)$.

1.2.2. Lemme.- Pour un objet X de $\mathcal{C}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) les seuls morphismes de P dans $\underline{k}X$ sont les morphismes canoniques;
- b) le morphisme canonique $i : \underline{k}X \rightarrow X$ est un monomorphisme;
- c) pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ tel que $\underline{k}Y = Y$, l'application $i^Y : \mathcal{C}(Y, \underline{k}X) \rightarrow \mathcal{C}(Y, X)$ est une injection;
- d) $\underline{g}(i) : \underline{g}(\underline{k}X) \rightarrow \underline{g}(X)$ est une bijection.

Preuve : a) $\Rightarrow$ b) : résulte de la caractérisation des monomorphismes dans les catégories possédant un coséparateur;

b) $\Rightarrow$ c) est évident;

c) $\Rightarrow$ d) : on a $P = \underline{k}P$, donc $\underline{g}(i) = \mathcal{C}(P, i)$ est une injection; comme d'autre part on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim \underline{S} \circ \underline{k}(X) & \xrightarrow{j} & \underline{S}(X) \\
 & \searrow & \nearrow \underline{S}(i) \\
 & \underline{S}(\underline{k}X) &
 \end{array}$$

où j est une surjection d'après les propriétés des limites à droite filtrantes dans $\mathcal{E}$, $\underline{S}(i)$ est une surjection;

d) $\Rightarrow$ a) : comme $\underline{S}$ est fidèle, il refléchit les monomorphismes, et i en est un; soit $u : P \rightarrow \underline{k}X$; $x = i.u : P \rightarrow X$ est un sous-objet de X , et $i.u = i.j_x$ entraîne $u = j_x$.

1.2.3. Définition.- On appelle objet de Kelley relatif à $\mathcal{K}$,
 tout objet X de $\mathcal{E}$ tel que $X = \underline{k}X$.

Il est bien évident que tout objet de $\mathcal{K}$ est un objet de Kelley; on désigne par $\mathcal{K}_e(\mathcal{E}, \mathcal{K})$, ou plus simplement $\mathcal{K}_e$, s'il n'y a pas risque de confusion, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ formée par les objets de Kelley relatifs à $\mathcal{K}$.

1.2.4. Théorème.- Si les conditions équivalentes du lemme 1.2.2
 sont vérifiées pour tout objet X de $\mathcal{E}$, la sous-catégorie $\mathcal{K}_e$ est relevante, i.e. son foncteur injection $\underline{k}_e : \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{E}$
 possède un adjoint à droite.

Démonstration : soit Y un objet de $\mathcal{K}_e$; soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{E}$; pour tout sous-objet $i_C : C \rightarrow Y$, où C est un objet de $\mathcal{K}$, $f_C = f.i_C$ est un morphisme de C dans X qui possède une décomposition triangulaire :

$$C \xrightarrow{p} K \xrightarrow{i_K} X$$

où K est un objet de $\mathcal{K}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{f_C} & X \\
 p \downarrow & \nearrow i_K & \uparrow i \\
 K & \xrightarrow{j_K} & \underline{k}X
 \end{array}$$

Posons $\bar{f}_C = j_K \cdot p$; comme $(X; f_C)$ est un cône inductif de base $\underline{k}(Y)$ ([G.Z]) et que i est un monomorphisme, $(\underline{k}X; \bar{f}_C)$ est un cône inductif de même base, et il existe $\bar{f} : Y \rightarrow \underline{k}X$ tel que $i \cdot \bar{f} = f$. Par suite $i^Y : \mathcal{C}(Y, \underline{k}X) \rightarrow \mathcal{C}(Y, X)$ est une surjection; c'est déjà une injection; on obtient ainsi un isomorphisme (naturel) de $\mathcal{K}e(Y, \underline{k}X)$ sur $\mathcal{C}(Y, X)$; enfin $\underline{k}X$ est un objet de Kelley, car $\mathcal{K}(\underline{k}X) = \mathcal{K}(X)$. L'adjonction $(\underline{k}e, \underline{k})$ entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}e$ est établie.

1.2.5. Corollaire.- La catégorie $\mathcal{K}e$ est une sous-catégorie
 | complète à droite de $\mathcal{C}$.

1.2.6. Remarque : les conditions du lemme 1.2.2 sont vérifiées si le foncteur $\underline{S}$ possède un adjoint à droite, ou si l'application canonique

$$\underline{S} : \varinjlim \underline{S}_\alpha \underline{k}(X) \longrightarrow \underline{S}(\underline{k}X)$$

est surjective. Le premier cas sera réalisé dans la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques, et le second dans la catégorie $\mathcal{CS}$ des espaces topologiques séparés.

On suppose maintenant que la catégorie $\mathcal{C}$ est complète. Soit $\underline{f} : \underline{J} \rightarrow \mathcal{K}e$ un petit foncteur; $\underline{k}e_\alpha \underline{f}$ est un petit foncteur de $\underline{J}$ dans $\mathcal{C}$, donc possède une limite à gauche; on sait que $\underline{k}(\varprojlim \underline{k}e_\alpha \underline{f})$ représente la limite à gauche de $\underline{f}$ dans $\mathcal{K}e$; autrement dit :

1.2.7. Proposition.- Si $\mathcal{C}$ est complète, la catégorie $\mathcal{K}_e$ est
complète à gauche.

Malheureusement ce n'est pas une sous-catégorie complète à gauche de $\mathcal{C}$. Par exemple, si X et Y sont deux objets de Kelley, le produit $X \times Y$, dans $\mathcal{C}$, n'est pas en général un objet de Kelley, mais $\underline{k}(X \times Y)$ représente le produit direct dans $\mathcal{K}_e$ de X et Y .

Les conditions du lemme 1.2.2 étant satisfaites, on a cependant :

1.2.8. Théorème.- Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède des produits directs finis, et si $\mathcal{K}$ est stable pour ces produits, pour tout objet de Kelley X , relatif à $\mathcal{K}$, dont les sous-objets appartenant à $\mathcal{K}$ sont convenables, et pour tout objet de Kelley Y , convenable dans $\mathcal{C}$, le produit $X \times Y$ (dans $\mathcal{C}$) est un objet de Kelley.

Preuve : soit $\mathcal{K}(X) \otimes \mathcal{K}(Y)$ la sous-catégorie de $\mathcal{K}(X \times Y)$ formée des objets $C \times D$, où $C \in \mathcal{K}(X)$ et $D \in \mathcal{K}(Y)$; c'est une sous-catégorie cofinale, par suite :

$$\varinjlim \underline{k}(X \times Y) = \varinjlim \underline{k}(X) \otimes \underline{k}(Y).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X \times Y &= (\varinjlim \underline{k}(X)) \times Y \\ &= \varinjlim_{C \in \mathcal{K}(X)} (C \times Y) \\ &= \varinjlim_{C \in \mathcal{K}(X)} (C \times \varinjlim \underline{k}(Y)) \\ &= \varinjlim (\underline{k}(X) \otimes \underline{k}(Y)) \\ &= \underline{k}(X \times Y) \end{aligned}$$

Cette situation se retrouvera souvent dans la pratique (tous les objets de $\mathcal{K}$ étant convenables) et permettra de démontrer pour certains types d'objets, la commutation aux produits pour des foncteurs ne possédant pas d'adjoint à gauche. Nous en verrons plusieurs exemples dans les chapitres suivants.

1.3. Foncteurs quasi-représentables; objets $\mathcal{K}$ -convenables.

Soit toujours $\mathcal{K}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ satisfaisant aux hypothèses du paragraphe 2, en particulier aux conditions du lemme 1.2.2. On conviendra d'écrire $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(., X)$ la restriction à $\mathcal{K}$ du foncteur $\mathcal{C}(., X)$ pour tout objet X de $\mathcal{C}$. Plus généralement on notera $\underline{f}_{\mathcal{K}}$ la restriction à $\mathcal{K}$ d'un foncteur défini sur $\mathcal{C}$.

Soit $\underline{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur contravariant.

1.3.1. Définition. On dit que $\underline{F}$ est quasi-représentable, s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$, et un isomorphisme fonctoriel de $\underline{F}$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(., X)$.

On constate que l'objet X , s'il existe, n'est pas défini à un isomorphisme près !

Soit $\mathcal{K}_e$ la sous-catégorie des objets de Kelley relatifs à $\mathcal{K}$; pour tout objet Y de $\mathcal{K}_e$, posons :

$$\overline{F}(Y) = \varprojlim \underline{F}_{\bullet k}(Y)$$

ce qui définit un foncteur (contravariant) de $\mathcal{K}_e$ dans $\mathcal{C}$ qui prolonge $\underline{F}$.

1.3.2. Proposition.- Si $\underline{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ est quasi-représentable, le foncteur $\overline{F} : \mathcal{K}_e \rightarrow \mathcal{C}$ est représentable.

On vérifiera sans beaucoup de peine que la réciproque est vraie !

Soient X un quasi-représentant de $\underline{F}$ et Y un objet de Kelley.

On a :

$$\begin{aligned}\overline{F}(Y) &= \varprojlim \underline{F}_\alpha \underline{k}(Y) = \varprojlim \mathcal{C}(\underline{k}(Y), X) = \mathcal{C}(\varinjlim \underline{k}(Y), X) \\ &= \mathcal{C}(Y, X).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathcal{C}(Y, X) = \mathcal{K}e(Y, \underline{k}X)$, d'après 1.2.4, et comme les isomorphismes ci-dessus sont fonctoriels, le résultat est démontré.

Cela revient à dire qu'un foncteur $\underline{F} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$ quasi-représentable admet un unique quasi-représentant qui est un objet de Kelley; par abus de langage on l'appellera le représentant de $\underline{F}$. Tout autre quasi-représentant a les mêmes sous-objets appartenant à $\mathcal{K}$.

Appliquons cela au foncteur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(. \times X, Y) : K \mapsto \mathcal{C}(K \times X, Y)$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$. S'il est quasi-représentable, on dit que l'objet X de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{K}$ -Y-convenable, et si X est $\mathcal{K}$ -Y-convenable pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, on dit que X est un objet $\mathcal{K}$ -convenable dans $\mathcal{C}$.

Il convient maintenant de revenir sur les résultats de 1.1.3. Si (F, ι) est un couple formé d'un objet de $\mathcal{C}$ et d'une injection ι de $\underline{S}(F)$ dans $\mathcal{C}(X, Y)$, on dit que (F, ι) est $\mathcal{K}$ -admissible, relativement à X et Y , si pour tout sous-objet $i_K : K \rightarrow F$ de F appartenant à $\mathcal{K}$, il existe un morphisme $u_K : K \times X \rightarrow Y$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{S}(K) \times \underline{S}(X) & \xrightarrow{\underline{S}(u_K)} & \underline{S}(Y) \\
 \downarrow \underline{S}(i_K) \times 1_{\underline{S}(X)} & & \uparrow e_{YX} \\
 \underline{S}(F) \times \underline{S}(X) & \xrightarrow{1_{\underline{S}(X)}} & \mathcal{C}(X, Y) \times \underline{S}(X) .
 \end{array}$$

Il est facile de voir que si $i_{K'} : K' \rightarrow F$ est un autre sous-objet de F tel que $i_K = i_{K'} \cdot i_{K', K'}$, alors $u_K = u_{K'} \cdot (i_{K', K'} \times 1_X)$.

1.3.4. Théorème.— Soit F un objet de $\mathcal{C}$; il existe une injection

$\iota : \underline{S}(F) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ telle que le couple (F, ι) soit $\mathcal{K}$ -admissible, ssi il existe un monomorphisme fonctoriel

$$\varphi : \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(., F) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.*X, Y).$$

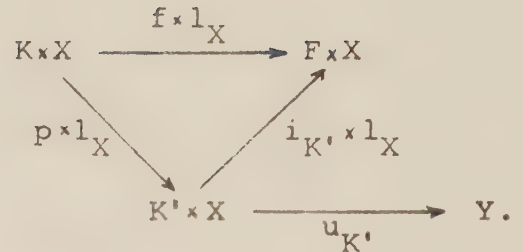
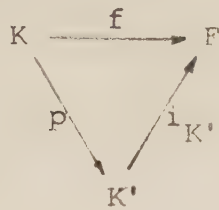
Preuve : soit $\varphi : \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(., F) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.*X, Y)$ un tel monomorphisme fonctoriel; $\varphi_P : \mathcal{C}(P, F) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ est une injection qu'on note $\iota : \underline{S}(F) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y)$; soit alors $i_K : K \rightarrow F$ un sous-objet de F appartenant à $\mathcal{K}$; on pose $u_K = \varphi_K(i_K) : K \times X \rightarrow Y$. Pour tous $k : P \rightarrow K$ et $x : P \rightarrow X$, on a :

$$\begin{aligned}
 e_{YX} \circ (\iota \times 1_{\underline{S}(X)}) \circ (\underline{S}(i_K) \times 1_{\underline{S}(X)})(k, x) &= e_{YX} \circ (\iota \times 1_{\underline{S}(X)})(i_K \cdot k, x) \\
 &= e_{YX}(\varphi_K(i_K)((k \times 1_X), x)) \\
 &= u_K \cdot (k \times 1_X) \cdot x \\
 &= u_K \cdot [k, x] \\
 &= \underline{S}(u_K)(k, x),
 \end{aligned}$$

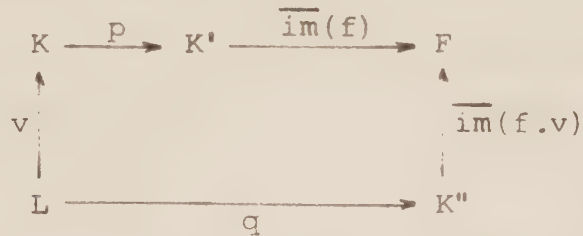
et le diagramme ci-dessus est vérifié.

Réciproquement, soit (F, ι) un couple $\mathcal{K}$ -admissible, relativement à X et Y . Soit $f : K \rightarrow F$ un morphisme; d'après le théorème 1.5.7 de $[P_1]$ il existe une "plus grande image" K' de f qui appartienne à $\mathcal{K}$, car celle-ci est saturée à droite. On a ainsi

les diagrammes commutatifs :



On obtient une application $f \mapsto u_{K'} \cdot (p \times 1_X)$ de $\mathcal{C}(K, F)$ dans $\mathcal{C}(K \times X, Y)$. En fait $u_{K'} \cdot (p \times 1_X)$ ne dépend pas de la décomposition triangulaire choisie, car si $f = i_{K''} \cdot q$ en est une autre, il existe $i_{K', K''} : K'' \rightarrow K'$, tel que $i_{K''} = i_{K'} \cdot i_{K', K''}$ et $p = i_{K', K''} \cdot q$, et par la remarque précédente : $u_{K''} = u_{K'} \cdot (i_{K', K''} \times 1_X)$, d'où $u_{K'} \cdot (p \times 1_X) = u_{K'} \cdot (i_{K', K''} \cdot q \times 1_X) = u_{K'} \cdot (i_{K', K''} \times 1_X) \cdot (q \times 1_X) = u_{K''} \cdot (q \times 1_X)$. Désignons par $\hat{f}_K$ cette application. Soit maintenant L un autre objet de $\mathcal{K}$, et $v : L \rightarrow K$ un morphisme; pour $f \in \mathcal{C}(K, F)$ on a le diagramme commutatif :



où K' et K'' sont des objets de $\mathcal{K}$. D'après les propriétés fonctorielles de l'image forte, et comme q est un épimorphisme (cf. $[P_1]$, 2.2.1.2 et 1.5.7.1) il existe $i_{K', K''} : K'' \rightarrow K'$, tel que

$$\overline{\text{im}}(f.v) = \overline{\text{im}}(f) \cdot i_{K', K''}$$

et $i_{K', K''} \cdot q = p \cdot v$.

Par suite :

$$\begin{aligned}
 u_{K'} \cdot (p \times 1_X) \cdot (v \times 1_X) &= u_{K'} \cdot (p \cdot v \times 1_X) = u_{K'} \cdot (i_{K', K''} \times 1_X) \cdot (q \times 1_X) \\
 &= u_{K''} \cdot (q \times 1_X) ;
 \end{aligned}$$

autrement dit le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(K, F) & \xrightarrow{\varphi_K} & \mathcal{C}(K \times X, Y) \\
 \mathcal{C}(v, F) \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}(v \times 1_X, Y) \\
 \mathcal{C}(L, F) & \xrightarrow{\varphi_L} & \mathcal{C}(L \times X, Y)
 \end{array}$$

est commutatif. Reste à montrer que les φ_K sont des injections. En utilisant encore le fait que P est un coséparateur, il suffit de montrer que φ_P est une injection : pour $f : P \rightarrow F$, on a $\varphi_P(f) = u_K$, où K est l'image de f isomorphe à P , donc :

$$\varphi_P(f) \cdot x = u_K \cdot x = e_{YX} \circ (u \times 1_{\underline{S}(X)}) \circ (\underline{S}(f) \times 1_{\underline{S}(X)})(x) = \iota(f) \cdot x$$

pour tout $x : P \rightarrow X$; donc $\varphi_P = \iota$ est une injection.

La recherche des objets convenables dans une catégorie $\mathcal{C}$ est liée à la connaissance de sous-catégories de $\mathcal{C}$, comme on le verra au chapitre suivant. D'autre part, tout objet convenable est évidemment $\mathcal{K}$ -convenable pour n'importe quelle sous-catégorie $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$; l'étude des objets $\mathcal{K}$ -convenables peut donc donner des conditions nécessaires pour qu'un objet soit convenable. Aussi est-il intéressant de confronter le théorème 1.1.8 avec la généralisation précédente.

Remarquons tout d'abord que si $\varphi : \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.., F) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.. \times X, Y)$ est un isomorphisme fonctoriel, le couple (F, φ_P) est $\mathcal{K}$ -admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$, et que, d'après 1.3.2, on peut toujours supposer que F est un objet de Kelley ; de plus, φ se prolonge en un isomorphisme fonctoriel $\bar{\varphi} : \mathcal{C}_{Ke}(.., F) \rightarrow \mathcal{C}_{Ke}(.. \times X, Y)$.

1.3.5. Théorème.- Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}$, et F un objet de Kelley, tels qu'il existe un isomorphisme fonctoriel φ de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.., F)$ sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(.., X, Y)$; alors (F, φ_p) est un couple $\mathcal{K}$ -admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$, et si (F', ι') est un autre couple $\mathcal{K}$ -admissible sur $\mathcal{C}(X, Y)$, où F' est un objet de Kelley, le triplet $(F', \mathcal{C}(X, Y), \iota')$ est plus fin que $(F, \mathcal{C}(X, Y), \varphi_p)$.

En aménageant la démonstration de 1.1.8, cela résulte du lemme suivant :

1.3.6. Lemme.- Soient (F, E, ι) et (F', E, ι') deux triplets, où $\iota : \underline{S}(F) \rightarrow E$ (resp. $\iota' : \underline{S}(F') \rightarrow E$) est une bijection. Si $\mathcal{K}(F')$ est une sous-catégorie de $\mathcal{K}(F)$, si pour tout sous-objet K de F' , appartenant à $\mathcal{K}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{S}(K) & \xrightarrow{\underline{S}(i_K)} & \underline{S}(F) \\
 \downarrow \underline{S}(i'_K) & & \downarrow \iota \\
 \underline{S}(F') & \xrightarrow{\iota'} & E
 \end{array}$$

et enfin si F' est un objet de Kelley, alors (F', E, ι') est plus fin que (F, E, ι) .

La démonstration, purement technique, fait appel en particulier aux hypothèses du lemme 1.2.2.

1.3.7. Corollaire.- Soit X un objet convenable; soit $\underline{D} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur adjoint à droite à π_X . Le foncteur $T \mapsto \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(T \times X, Y)$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$ est représentable pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ et a pour représentant $\underline{k}_0 \underline{D}(Y)$.

ch. II. Espaces convenables et espaces de Kelley.

On revient dans ce chapitre sur les notions étudiées dans un cadre abstrait au chapitre I, et on les développe dans diverses sous-catégories de la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques.

En ce qui concerne les espaces convenables le paragraphe 1.1 était purement spéculatif, car aucun objet de ce type n'était exhibé. On fait ici un retour aux sources pour montrer qu'il en existe dans les catégories topologiques, et essayer de les caractériser.

On sait depuis longtemps que les espaces localement compacts sont convenables. De plus, des résultats anciens, et quelques uns, nouveaux, qui sont donnés dans ce travail, laissent conjecturer la propriété suivante :

Dans la catégorie $\mathcal{C}$ (ou $\mathcal{CS}$) les seuls objets convenables sont les espaces localement compacts.

Il ne semble pas qu'il existe dans la littérature de démonstration générale de cette conjecture dans la catégorie $\mathcal{C}$, ni de contre-exemple pour l'infirmer; nous donnons une démonstration pour la catégorie $\mathcal{CS}$.

Le point de vue fonctoriel où nous nous sommes placés et la relativisation à des sous-catégories de $\mathcal{C}$, multiplient les questions ouvertes et rendent souvent insuffisants des résultats connus. Donnons un exemple : dans [A.D], R.Arens et J.Dugundji montrent que si X est un espace régulier, non localement compact (cf. terminologie), et si S désigne l'espace de Sierpinski ($\{0,1\}$ où le seul ouvert non trivial est $\{0\}$), il n'existe pas sur $\mathcal{C}(X,S)$ de moins fine topologie admissible. Dans notre langage, cela signifie qu'un espace régulier, convenable dans la catégorie $\mathcal{C}$, est nécessairement localement compact. Mais l'espace de Sierpinski n'étant pas séparé, cela ne nous renseigne pas sur les espaces réguliers séparés, convenables dans la catégorie $\mathcal{CS}$, cas pourtant fort intéressant étant donné le côté assez pathologique des espaces réguliers non séparés.

Terminologie. Les quelques phrases précédentes ont pu effrayer le lecteur trop orthodoxe. La nature des questions traitées dans ce chapitre nous impose de rompre avec la tradition bourbachique en ce qui concerne la terminologie liée aux axiomes de séparation. Ainsi un espace compact ne sera pas nécessairement séparé, non plus qu'un espace localement compact (espace dont tout point possède un système fondamental de voisinages compacts). Un espace régulier est un espace satisfaisant à l'axiome O_{III} . Par contre nous conservons le terme uniformisable pour un espace satisfaisant à l'axiome O_{IV} , et l'expression complètement régulier pour un espace uniformisable séparé.

Soit F une partie de $\mathcal{C}(X,Y)$; une topologie τ sur F sera dite admissible si le couple (F_τ, ι) est admissible au sens de 1.1.2 ; ι désigne l'injection canonique $F \rightarrow \mathcal{C}(X,Y)$. Remarquons que cette notion est indépendante de la catégorie dans laquelle on travaille, puisqu'elle ne dépend que de la continuité de $e_{YX} : F_\tau \times X \rightarrow Y$.

Les principales sous-catégories de $\mathcal{C}$ utilisées sont les suivantes :

$\mathcal{CS}$: espaces topologiques séparés (Hausdorff) ;

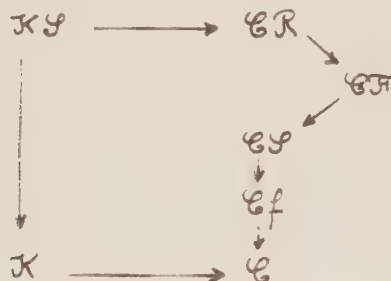
$\mathcal{CF}$: espaces fonctionnellement séparés ;

$\mathcal{CR}$: espaces complètement réguliers ;

$\mathcal{K}$: espaces compacts ;

$\mathcal{KS}$: espaces compacts séparés ;

$\mathcal{Cf}$: espaces satisfaisant à l'axiome (CF) : toute partie compacte est fermée.



Notations : soient A, B et C trois ensembles et $f : A \times B \rightarrow C$ une application ; pour tout $a \in A$ (resp. $b \in B$) on notera f_a (resp. f_b) l'application $x \mapsto f(a, x)$ (resp. $t \mapsto f(t, b)$) de B dans $\mathcal{C}(A, C)$ (resp. de A dans $\mathcal{C}(B, C)$).

2.1. Les théorèmes d'Arens.

Cette section est surtout d'exposition, mais donne cependant la démonstration de la conjecture dans le cas de la catégorie $\mathcal{C}_c$.

On appellera topologie co-admissible dans $\mathcal{C}$ (propre suivant la terminologie de [A.D]) sur $\mathcal{C}(X,Y)$ une topologie τ telle que, pour tout espace topologique T , et toute application $f \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$, l'application $t \mapsto f_t$ soit continue de T dans $\mathcal{C}_\tau(X,Y)$. La notion de co-admissibilité dépend de la catégorie dans laquelle on travaille.

Etant donnés deux espaces topologiques X et Y , on rappelle que la topologie de convergence compacte (compact open topology) sur $\mathcal{C}(X,Y)$ est la topologie dont l'ensemble des ouverts est engendré par les parties $T(K,W) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) / f(K) \subset W\}$ où K est un compact de X et W un ouvert de Y .

Plus généralement, $T(A,B)$ désignera toujours l'ensemble des applications continues f de X dans Y telles que $f(A) \subset B$. On notera $\mathcal{C}_c(X,Y)$ l'espace topologique obtenu en munissant $\mathcal{C}(X,Y)$ de la topologie de convergence compacte.

2.1.1. Proposition. - La topologie de convergence compacte est
| co-admissible.

En termes fonctoriels et avec les notations de 1.1 cela signifie que

$$\psi_Y : \mathcal{C}(\pi_{X..}, Y) \rightarrow \mathcal{C}(.., \mathcal{C}_c(X,Y))$$

est un monomorphisme fonctoriel. La démonstration est classique;

on la trouvera par exemple dans $[P.R_1]$.

2.1.2. Corollaire (Arens).- Toute topologie admissible sur $\mathcal{C}(X,Y)$ est plus fine que la topologie de convergence compacte.

C'est une conséquence immédiate de 1.1.3 et de la proposition précédente.

2.1.3. Corollaire.- Si la topologie de convergence compacte sur $\mathcal{C}(X,Y)$ est admissible, l'espace X est Y -convenable.

2.1.4. Théorème.- Soit X un espace topologique; l'application $Y \mapsto \mathcal{C}_c(X,Y)$ définit un foncteur covariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ (resp. de $\mathcal{CY}$ dans $\mathcal{CY}$) qui commute aux limites à gauche.

Preuve : si Y est séparé, $\mathcal{C}_c(X,Y)$ est également séparé. Soient $u : Y \rightarrow Z$ une application continue, et u_X l'application de $\mathcal{C}_c(X,Y)$ dans $\mathcal{C}_c(X,Z)$ canoniquement associée à u ; u_X est continue, car si $T(K,W)$ est un ouvert élémentaire de $\mathcal{C}_c(X,Z)$, on a $u_X(f) = u \circ f \in T(K,W)$ dès que $f \in T(K,V)$, où V est un ouvert de Y tel que $u(V) \subset W$. Reste à montrer que $\mathcal{C}_c(X, \cdot)$ commute aux produits directs et aux noyaux de paires. Ces propriétés sont déjà vraies au point de vue ensembliste.

Lemme A. Soient $(Y_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques et $Y = \prod_{i \in I} Y_i$; alors $\mathcal{C}_c(X,Y) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_c(X,Y_i)$.

Il suffit de montrer que la bijection canonique de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_c(X,Y_i)$ dans $\mathcal{C}_c(X,Y)$ est continue : soit $(W_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts $W_i \subset Y_i$; si K est un compact de X , $f(K) \subset \prod_{i \in I} W_i$

équivalent à $p_i \circ f(K) \subset W_i$, pour tout $i \in I$; autrement dit $T(K, \prod_{i \in I} W_i)$

s'identifie à $\prod_{i \in I} T(K, W_i)$; en tenant compte du fait que

$T(K, W_i) = \mathcal{C}(X, Y_i)$ si $W_i = Y_i$, si $\prod_{i \in I} W_i$ est un ouvert dans Y ,

$\prod_{i \in I} T(K, W_i)$ est un ouvert dans $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_c(X, Y_i)$.

Lemme B. Soit Y un sous-espace de Z ; alors $\mathcal{C}_c(X, Y)$ est un sous-espace de $\mathcal{C}_c(X, Z)$.

En effet, si V est un ouvert de Y , il existe un ouvert W de Z tel que $W \cap Y = V$; il est alors évident que $T(K, W) \cap \mathcal{C}(X, Y) = T(K, V)$.

Compte tenu de ce théorème la question se posera donc naturellement de savoir si $\mathcal{C}_c(X, \cdot)$ possède un adjoint à gauche (dans $\mathcal{C}$ ou dans $\mathcal{C}\mathcal{Y}$) (cf. §.3).

Revenons aux résultats d'Arens :

2.1.5. Proposition. - Soit X un espace topologique (resp. séparé); si pour tout espace (resp. séparé) Y , la topologie de convergence compacte sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est admissible, l'espace X est convenable dans $\mathcal{C}$ (resp. dans $\mathcal{C}\mathcal{Y}$); l'adjoint à droite à π_X est $\mathcal{C}_c(X, \cdot)$.

2.1.6. Théorème (Arens-Cohen). - Tout espace localement compact est convenable dans $\mathcal{C}$. Tout espace localement compact séparé est convenable dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}\mathcal{Y}$.

Il suffit de montrer que la topologie de convergence compacte est admissible, ce qui se fait sans aucune hypothèse de

séparation ou de régularité (cf. [A], [C₁], [P.R₁]).

La conjecture avancée en introduction constitue donc la réciproque exacte de ce théorème. On verra que la perte d'information, concernant l'adjoint à droite de π_X , subie entre 2.1.5 et 2.1.6 rend difficile la recherche d'une démonstration globale de la conjecture.

2.1.7. Remarque.- Le caractère fonctoriel de la conjecture est essentiel; dans [A.D] on trouve un exemple d'espace (fonctionnellement séparé) non localement compact, qui est R-convenable.

R.Arens lui-même a donné un début de réponse :

2.1.8. Théorème (Arens).- Soit X un espace uniformisable (resp. complètement régulier) convenable dans $\mathcal{C}$ (resp. dans $\mathcal{C}^*$); alors X est localement compact.

R.Arens montre (cf. [A]) que si X est uniformisable, et non localement compact, il n'existe pas sur $\mathcal{C}(X)$ de moins fine topologie admissible. En vertu de 1.1.8 l'espace X n'est pas R-convenable, et a fortiori n'est pas convenable.

Ceci constitue une réciproque très partielle, car la condition uniformisable n'est pas naturellement associée (sauf dans le cas séparé) aux espaces localement compacts (cf. § 4).

Par ailleurs la propriété de l'espace de Sierpinski citée en introduction permet d'énoncer :

2.1.9. Théorème (Arens-Dugundji).- Un espace régulier convenable dans $\mathcal{C}$ est localement compact.

On peut faire la même remarque que ci-dessus sur la valeur

de cette réciproque, les espaces localement compacts non séparés n'étant généralement pas réguliers.

On peut montrer 2.1.9 en utilisant des résultats récents de N.Noble ($[N_3]$), que nous citons sous forme de lemme, et seulement dans le cadre restreint où ils nous sont utiles. Pour un espace topologique X on considère la condition suivante :

(LF) Tout point $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages V , tels que, quel que soit l'espace T , la restriction à $T \times V$ de $p_T : T \times X \rightarrow T$ soit une application fermée.

On aura l'occasion dans le ch. 3 d'utiliser une condition locale très proche de celle-ci. Il est connu que la condition (LF) caractérise les espaces localement compacts ($[N_3]$). On a alors le résultat suivant dont on trouvera la démonstration dans $[N_3]$:

2.1.10. Lemme.— Soit X un espace régulier; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est localement compact;
- b) X satisfait à (LF);
- c) pour tout quotient $q : Y \rightarrow Z$, l'application $1_X \times q$ de $X \times Y$ dans $X \times Z$ est un quotient.

Le théorème 2.1.9 est alors conséquence du lemme et du théorème 1.1.10.

Enfin on peut régler le cas des espaces séparés en deux temps; tout d'abord :

2.1.11. Proposition.— Soit X un espace séparé non régulier; il

existe une application quotient $q : Y \rightarrow Z$, où Y et Z sont séparés, telle que $l_X \times q$ ne soit pas un quotient.

Preuve : nous reproduisons ici la démonstration de Noble. Soient X un tel espace, $x_0 \in X$ et U_0 un voisinage de x_0 ne contenant aucun voisinage fermé de x_0 . En particulier U_0 n'est pas fermé; soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ l'ensemble des points de $\overline{U_0} - U_0$. On considère la somme directe $Y = \coprod_{\alpha \in A} X$ et on identifie les points x_α ; on obtient ainsi un espace séparé Z et une application quotient $q : Y \rightarrow Z$. Soit alors $F = \coprod_{x \in A} \Delta_X$ qui est un fermé de $X \times Y$; l'image réciproque de $G = (l_X \times q)(F)$ est évidemment F . Si z_0 désigne l'image des $x_\alpha \in Y$, on a $(x_0, z_0) \notin G$, car $x_0 \neq x_\alpha$ quel que soit $\alpha \in A$, et $(x_0, z_0) \in \overline{G}$; en effet, soit $U \times V$ un voisinage de (x_0, z_0) dans $X \times Z$; on peut supposer $U \subset U_0$, donc $\overline{U} \not\subset U_0$ et $\overline{U} \subset \overline{U_0}$; il existe donc $x_\alpha \in \overline{U}$; l'image réciproque par q de V est un voisinage de x_α dans Y , donc rencontre U ; autrement dit il existe un point de G dans le voisinage $U \times V$. Comme G n'est pas fermé, $l_X \times q$ n'est pas un quotient.

Si l'on tient toujours compte de 1.1.10 (structures finales) pour tout espace X séparé, convenable dans $\mathcal{CS}$, et pour tout quotient séparé $q : Y \rightarrow Z$, l'application $l_X \times q : X \times Y \rightarrow X \times Z$ est un quotient (séparé). On en déduit qu'un espace convenable dans $\mathcal{CS}$ est nécessairement régulier, et d'après ([M₂], th.2.1) est localement compact. En définitive :

2.1.12. Théorème.- Tout espace convenable dans $\mathcal{CS}$ est localement compact.

Si un espace séparé X est convenable dans $\mathcal{C}$, le foncteur adjoint à droite à π_X s'identifie à $\mathcal{C}_c(X, \cdot)$ muni d'une topologie plus fine que la topologie de convergence compacte, donc séparée si on restreint ce foncteur à $\mathcal{C}\mathcal{F}$. On a donc aussi :

2.1.13. Corollaire.- Tout espace séparé convenable dans $\mathcal{C}$ est
| localement compact.

A la lumière de ce dernier résultat, on s'aperçoit que l'apport du théorème 1.9 est bien maigre, puisqu'un espace régulier non séparé ne satisfait même pas à l'axiome T_0 . On s'efforcera dans la suite de combler ce fossé entre T_0 et T_2 , en particulier en ce qui concerne les espaces accessibles.

2.2. Les objets de Kelley dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}\mathcal{F}$.

La littérature sur les espaces de Kelley est à ce jour très importante et il n'est pas question de la reprendre ici. Il est bon de dire cependant que la notion d'espace de Kelley ne coïncide avec celle de k -space de $[K_1]$ que dans la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{F}$ des espaces satisfaisant à l'axiome :

(CF) Tout compact de X est fermé.

Dans la catégorie $\mathcal{C}$ la sous-catégorie de base est celle des espaces compacts K . Dans $\mathcal{C}\mathcal{F}$ c'est bien entendu la sous-catégorie $K\mathcal{F}$. La situation $(\mathcal{C}, K\mathcal{F})$ plus anormale sera évoquée à propos des compactologies. Enfin les théorèmes généraux sont donnés dans $\mathcal{C}$; il sera facile de les traduire dans $\mathcal{C}\mathcal{F}$.

2.2.1. Proposition.- Pour un espace topologique X les propriétés
| suivantes sont équivalentes :

- a) X est un objet de Kelley relatif à $\mathcal{C}$;
- b) toute partie $F \subset X$, telle que $F \cap C$ soit fermé dans C , pour toute partie compacte C de X , est fermée;
- c) toute application $f : X \rightarrow Y$ dont les restrictions aux compacts de X sont continues, est continue.

En suivant les notations du chapitre 1, §.2, et en remarquant que $(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ (resp. $(\mathcal{C}_0, \mathcal{K}_0)$) vérifie les conditions imposées à ce paragraphe, on notera $\underline{k}X$ le "Kelleyifié" de l'espace X .

2.2.2. Proposition. - L'espace $\underline{k}X$ est la limite à droite dans $\mathcal{C}$ des sous-espaces compacts de X ; de plus les parties compactes de X et de $\underline{k}X$ sont les mêmes, avec la même topologie induite.

2.2.3. Remarques. - a) le résumé précédent ne correspond pas exactement au résultat catégorique. En effet, les sous-espaces compacts de X ne forment pas tous les sous-objets compacts de X , sauf si X est séparé; mais ils forment une sous-catégorie cofinale de $\mathcal{K}(X)$.

b) Les parties F d'un espace topologique qui vérifient la condition b) de 2.2.1 sont quelquefois appelées k-fermés de X . Toute partie k-fermée est ferméessi X est un espace de Kelley.

On déduit immédiatement des résultats ci-dessus :

2.2.4. Proposition (stabilité) - a) Tout sous-espace fermé d'un espace de Kelley est un espace de Kelley.

b) Tout quotient d'un espace de Kelley est un espace de Kelley.

Le point b) est lié au fait, déjà utilisé, que les quotients (i.e. la topologie finale associée à une surjection) déterminent exactement les épimorphismes stricts dans la catégorie $\mathcal{C}$. Dans $\mathcal{CS}$ les épimorphismes stricts sont définis par les quotients séparés. Soit maintenant X un espace séparé : comme le morphisme canonique $\varinjlim_{\mathcal{C}} \underline{k}(X) \rightarrow X$ est un bimorphisme, le kelleyifié de X dans $\mathcal{C}$ est également kelleyifié de X dans $\mathcal{CS}$. En d'autres termes les objets de Kelley dans $\mathcal{C}$ qui sont séparés sont exactement les objets de Kelley dans $\mathcal{CS}$ relativement à $\mathcal{KS}$. En particulier un quotient dans $\mathcal{C}$ d'un objet de Kelley dans $\mathcal{CS}$ est un objet de Kelley dans $\mathcal{C}$. Il n'y a donc pas d'ambiguïté à parler d'espaces de Kelley sans préciser la catégorie $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{CS}$. Par contre nous verrons (§.6) que les objets de Kelley dans $\mathcal{CK}$ relativement à $\mathcal{KS}$ ne sont pas nécessairement des espaces de Kelley.

On voit déjà que les problèmes de séparation jouent un rôle non négligeable :

2.2.5. Théorème.- Soit $\underline{k}X$ le Kelleyifié d'un espace X :

- a) X satisfait à (CF) ssi $\underline{k}X$ satisfait à (CF);
- b) X est semi-séparé ssi $\underline{k}X$ est semi-séparé;
- c) X est accessible ssi $\underline{k}X$ est accessible;
- d) X est un espace de Kolmogoroff ssi $\underline{k}X$ l'est.

La terminologie semi-... est employée pour les propriétés des suites : semi-séparé signifie donc "toute suite convergente n'a qu'un point limite" (cf. [M.N],[W₂]).

Les axiomes de séparation ci-dessus sont héréditaires

pour la relation "plus fine que" entre topologies; il suffit donc de montrer les conditions suffisantes :

a) soit C un compact de X et $x \in \bar{C}$; $C \cup \{x\}$ est compact et a la même topologie induite dans $\underline{k}X$, donc C est fermé dans $C \cup \{x\}$, et $x \in C$.

b) si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a dans X , elle converge également vers a dans $\underline{k}X$.

c) et d) : soient S l'espace de Sierpinski et B le bi-point grossier; si X ne satisfait pas à T_1 (resp. T_0) il contient un sous-espace homéomorphe à S ou à B (resp. à B); comme ce sont des compacts, il en est de même de $\underline{k}X$.

On notera que l'axiome de séparation le plus important, celui de Hausdorff, ne figure pas dans cette énumération, non plus d'ailleurs que la propriété d'être fonctionnellement séparé ou celle d'être complètement régulier.

Exemple : soit X un ensemble infini, non dénombrable. L'ensemble des parties de cardinal au plus dénombrable est l'ensemble des fermés d'une topologie sur X , dite co-dénombrable; X satisfait à (CF) car ses parties compactes sont les parties finies, qui sont d'ailleurs séparées. Le Kelleyifié de X est discret, et X n'est pas séparé puisqu'irréductible. Plus généralement soit X un ensemble infini et M_α un cardinal strictement inférieur à $\text{Card}(X)$; on définit comme ci-dessus la topologie co- M_α . Aucune des topologies ainsi définies n'est séparée, et elles ont toutes les mêmes compacts que la topologie discrète. Notons

que ces espaces sont $\aleph_{\alpha+1}$ -compacts; en particulier la topologie co-dénombrable définit un espace de Lindelöf.

2.2.6. Définition. On dit qu'un espace X est ponctuellement compact si tout point $x \in X$ possède un voisinage compact.

Tout espace compact est ponctuellement compact, et l'on sait que dans $\mathcal{CS}$ tout espace ponctuellement compact est localement compact. Plus généralement :

2.2.7. Proposition.- Soit X un espace ponctuellement compact; si pour tout point $x \in X$ l'un des voisinages compacts de x est régulier, X est localement compact.

La preuve en est élémentaire; les conséquences sont plus intéressantes, car on établit ainsi le résultat rappelé ci-dessus et, également, l'équivalence des définitions des espaces localement compacts réguliers donnés dans ces pages, dans Kelley ($[K_1]$) et dans Arens-Dugundji ($[A.D]$).

On obtient facilement :

2.2.8. Proposition.- Tout espace ponctuellement compact est un espace de Kelley.

Ce qui permet de caractériser comme suit les espaces de Kelley :

2.2.9 Théorème.- Les espaces de Kelley dans $\mathcal{C}$ (resp. dans $\mathcal{CS}$) sont exactement les quotients (resp. quotients séparés) d'espaces ponctuellement compacts (resp. localement compacts séparés).

La propriété pour $\mathcal{CS}$ se trouve dans Dugundji ($[D]$); dans les deux cas elle résulte immédiatement de la présentation

canonique d'une limite à droite :

$$S_0 \rightrightarrows S_1 \longrightarrow \underline{k}X$$

comme conoyau de paire; S_1 est ici la somme topologique d'une famille d'espaces compacts, donc un espace ponctuellement compact.

Le foncteur $\underline{k} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{K}e(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ (resp. $\underline{k} : \mathcal{CS} \longrightarrow \mathcal{K}e(\mathcal{CS}, \mathcal{KS})$) possédant un adjoint à gauche, commute aux limites à gauche. Cependant le produit dans $\mathcal{C}$ de deux espaces de Kelley n'est pas en général un espace de Kelley. Le théorème général 1.2.8 permet d'énoncer :

2.2.10. Théorème.- Soient T et X deux espaces de Kelley; si les compacts de l'un sont convenables dans $\mathcal{C}$, et si l'autre est convenable, le produit $T \times X$ est un espace de Kelley.

2.2.11. Corollaire.- Si T est un espace de Kelley et X est un espace compact convenable, $T \times X$ est un espace de Kelley.

D'après 2.1.12, le même théorème dans la catégorie $\mathcal{CS}$ prend la forme simple :

2.2.12. Théorème.- Soient T et X deux espaces de Kelley séparés; si l'un est localement compact, le produit $T \times X$ est un espace de Kelley séparé.

C'est le théorème classique de Cohen ($[C_1]$).

Enfin dans la catégorie $\mathcal{C}$ on peut montrer très simplement :

2.2.13. Théorème.- Soient T et X deux espaces de Kelley; si l'un est localement compact, le produit $T \times X$ est un espace de Kelley.

Si T est localement compact, et X un espace de Kelley, il

existe un quotient $q : Y \longrightarrow X$, où Y est ponctuellement compact; alors $T_X Y$ est lui aussi ponctuellement compact, et $q \circ l_T$ est un quotient car T est convenable.

On trouvera dans [B.Y] une démonstration interne de ce résultat, qui ne fait pas appel à l'hypothèse de séparation postulée dans l'énoncé du théorème (cf. [P.R₁]).

2.2.14. Remarque.- On peut tirer de ce résultat des généralisations du théorème d'Ascoli; on en trouvera certaines dans [P.R₁], et les formes définitives pour les espaces de Kelley chez R.C.Steinlage ([S₃]); signalons enfin que N.Noole, par d'autres méthodes a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace X satisfasse des théorèmes du type "Ascoli" ([N₂]).

2.3. Le foncteur $\mathcal{C}_c(X, .)$.

On vient de donner des conditions suffisantes pour que le produit de deux espaces de Kelley soit encore un espace de Kelley; il en existe bien d'autres, par exemple, comme on l'a vu dans la démonstration de 2.2.13, le produit de deux espaces ponctuellement compacts est encore ponctuellement compact donc de Kelley; il en est de même du produit de deux espaces satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité.

On sait (théorèmes généraux) que la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{C}, \mathcal{K})$ (resp. $\mathcal{K}(\mathcal{C}^s, \mathcal{K}^s)$) est une sous-catégorie complète à droite de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}^s$). D'autre part c'est une catégorie complète à gauche; en particulier, pour deux espaces de Kelley, T et X , le produit direct dans $\mathcal{K}$ est $\underline{k}(T \times X)$, noté encore $T \times_{\underline{k}} X$. On

l'obtient topologiquement en prenant pour fermés (resp. ouverts) les parties F (resp. U) telles que pour tout couple (C, D) de parties compactes ($C \subset T$, $D \subset X$), $F \cap (C \times D)$ soit fermé (resp. $U \cap (C \times D)$ soit ouvert) dans $C \times D$ pour la topologie produit ordinaire; cette topologie sur l'ensemble produit $T \times X$ est encore la topologie finale associée aux injections canoniques $C \times D \hookrightarrow T \times X$. Plus généralement, si T et X sont des espaces quelconques, $T \times_{\underline{k}} X = \underline{k}T \times_{\underline{k}} \underline{k}X$, car le foncteur $\underline{k}$ commute aux produits directs.

On se propose de revenir aux espaces convenables dans $\mathcal{C}$ au moyen du foncteur $\mathcal{C}_c(X, .)$ et de topologies intermédiaires entre $T \times_{\underline{k}} X$ et $T \times X$. Dans [B₄] R. Brown décrit huit de ces topologies intermédiaires, qui sont toutes construites sur le modèle de $T \times_{\underline{k}} X$, avec des parties de $T \times X$ munies de la topologie produit. On reprend certains des résultats de Brown en supprimant l'hypothèse de séparation pour les espaces étudiés; ceci entraîne certaines complications, mais ne modifie pas sensiblement les résultats définitifs. Par ailleurs le foncteur $\mathcal{C}_c(X, .)$ qui était déjà intervenu dans la proposition 2.1.5 va jouer un rôle fondamental.

2.3.1. Théorème.— Le foncteur $\mathcal{C}_c(X, .)$ possède un adjoint à gauche.

C'est la conséquence immédiate du théorème de Freyd-Mitchell ($[M_1]$) et du théorème 2.1.4, car le bi-point grossier B est un séparateur dans la catégorie $\mathcal{C}$.

Pour la catégorie $\mathcal{C}$ qui ne possède pas de séparateur, il faut préciser le résultat précédent.

2.3.2. Théorème. - Soit $\underline{G}$ le foncteur adjoint à gauche à $\mathcal{C}_C(X, .)$;
il existe un bimorphisme fonctoriel $u : \underline{G} \rightarrow \pi_X$.

Preuve : soient T un espace topologique et $s : T \rightarrow \mathcal{C}_C(X, T \times X)$ l'application définie par $s(t)(x) = (t, x)$ (l'identité éclatée) ; soit $\varphi : \mathcal{C}(., \mathcal{C}_C(X, .)) \rightarrow \mathcal{C}(\underline{G}., .)$ l'isomorphisme d'adjonction ; alors $u = \varphi(s)$ est un bimorphisme pour tout espace T .

Il est aisé de vérifier que si $T = P$, espace réduit à un point, $\underline{G}(P)$ s'identifie à X et $u : \underline{G}(P) \rightarrow X$ à l'identité. Si T est un espace discret, on a $T = \mathcal{P}(T)$ et comme $\underline{G}$ commute aux limites à droite, $\underline{G}(T)$ s'identifie à $T \times X$ et u à l'identité. Soit alors T un espace quelconque, et T^d l'espace discret de même support ; soit $v : T^d \rightarrow T$ l'application identique ; les deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(\underline{G}(T), T \times X) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, T \times X)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}(T^d \times X, T \times X) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{C}(T^d, \mathcal{C}_C(X, T \times X)) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{C}(T^d \times X, T^d \times X) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{C}(T^d, \mathcal{C}_C(X, T^d \times X))
 \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites naturellement de v , donnent les égalités suivantes

$$u \circ \underline{G}(v) = \varphi(s) \circ \underline{G}(v) = \varphi(s \circ v) = v \times 1_X.$$

Comme $\underline{G}(v)$ est un bimorphisme, car $\underline{G}(v)$ est un épimorphisme, $u = \varphi(s)$ est un bimorphisme.

Par transport de structure, on obtient sur l'ensemble produit $T \times X$ une topologie plus fine que la topologie produit ;

on notera $T_{\mathbf{x}_a}X$ (adjonction) l'espace ainsi défini; dans ces conditions $u : T_{\mathbf{x}_a}X \rightarrow T_{\mathbf{x}}X$ est l'application identique (continue).

Remarque : ce résultat aurait pu trouver sa place au chapitre 1, mais pour ce faire il aurait fallu introduire des hypothèses trop artificielles dans le cadre d'une catégorie abstraite, hypothèses qui se trouvent naturellement vérifiées dans la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques. On notera en particulier que l'hypothèse du lemme 1.1.4 sur $\underline{L}(A) \times X \simeq X^{(A)}$ sert explicitement dans la démonstration de 2.3.2.

Les restrictions des deux foncteurs $\mathcal{C}_c(X, .)$ et $\underline{G}$ à la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{Y}$, dans le cas où X est un espace séparé, prennent leurs "valeurs" dans la catégorie $\mathcal{C}\mathcal{V}$; comme celle-ci est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, on a :

2.3.3. Corollaire.- Pour tout espace séparé X , le foncteur

$\mathcal{C}_c(X, .)$ de $\mathcal{C}\mathcal{Y}$ dans $\mathcal{C}\mathcal{V}$ possède un adjoint à gauche qui s'identifie au foncteur $T \mapsto T_{\mathbf{x}_a}X$, où a désigne une topologie sur l'ensemble produit $T \times X$, plus fine que la topologie produit.

Il s'agit maintenant de caractériser, si faire se peut, la topologie a . On sait déjà que si X est localement compact, c'est la topologie produit ordinaire, et dans le cas séparé la réciproque est vraie d'après 2.1.12.

2.3.4. Lemme.- Soient X et Y deux espaces topologiques; pour tout compact C de X si Y est régulier, ou sinon, pour tout compact C localement compact de X , la restriction de e_{YX}

à $\mathcal{C}_C(X, Y) \times C$ est continue.

Preuve : si Y est régulier, soit V un voisinage fermé de $f(x)$, pour $(f, x) \in \mathcal{C}_C(X, Y) \times C$; $\bar{f}^{-1}(V) \cap C$ est un voisinage compact K de x dans C , et $T(K, V)$ est un ouvert de $\mathcal{C}_C(X, Y)$ tel que $e_{YX}(T(K, V) \times K)$ soit contenu dans V . Dans l'autre hypothèse le voisinage compact K de x dans C est obtenu directement.

On appellera base de compacts d'un espace X un recouvrement $\mathcal{K}$ de X formé de parties compactes, et tel que pour toute partie compacte C de X il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $C \subset K$.

Soit maintenant X un espace possédant une base de compacts localement compacts; ou bien Y un espace régulier; on a, compte tenu des propriétés de la topologie de convergence compacte (prop. 2.1.2), les injections :

$$\mathcal{C}(T \times X, Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y)) \hookrightarrow \mathcal{C}(T \times_{\underline{K}} X, Y).$$

En effet, soit $f : T \rightarrow \mathcal{C}_C(X, Y)$; par application du foncteur π_X et du foncteur $\underline{k}$, on obtient une application continue $f \times 1_X : T \times_{\underline{K}} X \rightarrow \mathcal{C}_C(X, Y) \times_{\underline{K}} X$, et comme $e_{YX} : \mathcal{C}_C(X, Y) \times_{\underline{K}} X \rightarrow Y$ est continue (lemme 2.3.4 et prop. 2.2.1), $e_{YX} \circ (f \times 1_X)$ est une application continue de $T \times_{\underline{K}} X$ dans Y . Ainsi :

2.3.5. Proposition.- Soient T et X deux espaces de Kelley, tels que $T \times X = T \times_{\underline{K}} X$; si X possède une base de compacts localement compacts, on a pour tout espace Y :

$$\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y)) \simeq \mathcal{C}(T \times X, Y).$$

On remarquera que la condition " T et X sont de Kelley" n'est pas restrictive puisque $T \times X$ est de Kelley.

Supposons maintenant T quelconque, et soit X un espace possédant une base de compacts localement compacts. Si l'on désigne par $T \times_{\underline{I}} X$ la topologie finale sur $T \times X$ associée aux injections $T \times C \rightarrow T \times X$, où C est un compact de X , la démonstration précédant 2.3.5 montre également qu'on a l'injection :

$$\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y)) \rightarrow \mathcal{C}(T \times_{\underline{I}} X, Y).$$

Supposons que X ne soit pas un espace de Kelley, et prenons pour T l'espace réduit à un point; alors il existe un espace Y tel que $\mathcal{C}(T \times_{\underline{I}} X, Y) = \mathcal{C}(\underline{k}X, Y)$ contienne strictement $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y)) = \mathcal{C}(X, Y)$. Par suite la topologie $T \times_{\underline{I}} X$ est trop fine pour qu'on puisse avoir l'égalité $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y)) = \mathcal{C}(T \times_{\underline{I}} X, Y)$, pour tout espace Y . L'exemple précédent montre qu'il faut pouvoir rendre partiellement continues par rapport à X les applications appartenant à $\mathcal{C}(T \times_{\underline{I}} X, Y)$, ce qui se fait en définissant sur l'ensemble $T \times X$ la topologie finale associée aux injections :

$$\begin{aligned} T \times C &\rightarrow T \times X \\ \{t\} \times X &\rightarrow T \times X. \end{aligned}$$

On note $T \times_{\underline{S}} X$ l'espace ainsi obtenu qui est moins fin que $T \times_{\underline{I}} X$.

2.3.6. Lemme.— Soit $g \in \mathcal{C}(T \times_{\underline{S}} X, Y)$; l'application $t \mapsto g_t$ appartient à $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_C(X, Y))$.

Tout d'abord $g|_{\{t\} \times X}$ est continue, donc $g_t \in \mathcal{C}(X, Y)$. Soit $T(C, W)$ un ouvert dans $\mathcal{C}_C(X, Y)$; si $g_t \in T(C, W)$, on a $g(\{t\} \times C) \subset W$; comme $g|_{T \times C}$ est continue, pour tout $x \in C$ il existe un voisinage U_x de t et un voisinage V_x de x dans C tels que $g(U_x \times V_x) \subset W$. Du recouvrement $(V_x)_{x \in C}$ de C on extrait un recouvrement fini

$V_1, \dots, V_n$ et on pose $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ pour les U_i correspondants; alors $g(U \times C) \subset W$, i.e. $g_U \subset T(C, W)$.

On en déduit immédiatement deux résultats :

2.3.7. Proposition.- La topologie $\underline{a}$ sur $T \times X$ est plus fine que la topologie $\underline{s}$, pour tout espace T .

2.3.8. Théorème.- Si X possède une base de compacts localement compacts, le foncteur $T \mapsto T \times_{\underline{s}} X$ est adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{C}_c(X, \cdot)$.

Preuve : comme $e_{YX}, \{f\} \times X$ est continue, le même argument que celui de 2.3.5 montre que $f \mapsto e_{YX} \circ (f \times 1_X)$ est une injection de $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_c(X, Y))$ dans $\mathcal{C}(T \times_{\underline{s}} X, Y)$; la réciproque est établie par le lemme 2.3.6.

2.3.9. Remarques.- a) il est bien évident qu'un espace qui possède une base de compacts localement compacts est loin d'être localement compact (espaces séparés); par contre on n'a pu décider de la réciproque, à savoir : dans un espace localement compact existe-t-il une base de compacts localement compacts?

b) Si X est localement compact, il est facile de vérifier que pour tout espace T , $T \times_{\underline{s}} X = T \times X$. Cependant, compte tenu de la remarque précédente, le théorème 2.1.6 n'est pas, pour l'instant, conséquence de 2.3.8.

c) Si un espace ponctuellement compact possède une base de compacts localement compacts, il est localement compact. En effet, soient $x \in X$ et V un voisinage compact de x ; il existe K compact localement compact, tel que $V \subset K$; les voisinages de x dans K

contenus dans V sont également voisinages de x dans X .

L'obstruction rencontrée dans la remarque a) provient du fait que l'intersection de deux compacts, même s'ils sont voisinages de certains de leurs points, n'est pas nécessairement compacte.

Avant d'étudier plus spécialement les espaces séparés et les espaces accessibles, pour lesquels la situation se simplifie, donnons quelques généralisations des théorèmes de R. Brown. Aux deux topologies $\underline{r}$ et $\underline{s}$ déjà définies ajoutons la suivante : c'est la topologie finale associée aux injections $C \times D \rightarrow T \times X$ et $T \times \{x\} \rightarrow T \times X$. Elle est en général moins fine (strictement) que celle de $T \times_{\underline{k}} X$; on la note $\underline{p}$.

2.3.10. Proposition.- Si X est un espace de Kelley, $T \times_{\underline{s}} X = T \times_{\underline{r}} X$.

Soit F un fermé de $T \times_{\underline{r}} X$, i.e. pour tout compact C de X , $F \cap (T \times C)$ est fermé dans $T \times C$. Soit $t \in T$ et soit $F(t)$ la coupe de F suivant t ; pour tout compact C de X , $F(t) \cap C$ est la coupe de $F \cap (T \times C)$ suivant t , donc est fermée dans C , d'où le résultat puisque X est de Kelley.

2.3.11. Proposition.- Si T est un espace de Kelley, $T \times_{\underline{k}} X = T \times_{\underline{p}} X$.

C'est évident.

2.3.12. Proposition.- Si T est un espace de Kelley, et si X possède une base de compacts convenables, $T \times_{\underline{k}} X = T \times_{\underline{r}} X$.

Preuve : soit F un fermé dans $T \times_{\underline{k}} X$; pour tout compact convenable C de X , $T \times C$ est un espace de Kelley (2.2.11), donc $F \cap T \times C$ est fermé dans $T \times C$ ssi pour tous compacts $B \subset T$ et $C' \subset C$, $F \cap (B \times C')$ est fermé dans $B \times C'$, ce qui est le cas. Si C est un compact quel-

conque, il est contenu dans un compact convenable K , et $F \cap (T \times C) = (F \cap (T \times K)) \cap (T \times C)$, est fermé dans $T \times C$.

Enfin :

2.3.13. Corollaire.- Soient T et X deux espaces de Kelley; si X possède une base de compacts convenables, $T \times_{\underline{k}} X = T \times_{\underline{s}} X$.

On remarquera que lorsque les espaces de Kelley sont en jeu la définition de ces espaces par limite à droite permet le plus souvent de remplacer l'expression "compacts localement compacts" par "compacts convenables", ce qui est sans intérêt si la conjecture émise au début de ce chapitre est confirmée, ce qui est le cas dans la catégorie $\mathcal{K}$; mais en l'état actuel de la question pour la catégorie $\mathcal{K}$ la distinction mérite d'être faite.

Si maintenant on utilise le théorème 2.3.8 :

2.3.14. Corollaire.- Soit X un espace de Kelley possédant une base de compacts localement compacts; le foncteur $T \mapsto T \times_{\underline{k}} X$ de $\mathcal{K}_e$ dans $\mathcal{K}_e$ possède un adjoint à droite : $Y \mapsto \underline{k}(\mathcal{C}_c(X, Y))$.

En effet, d'après 2.3.13, $\mathcal{K}_e(T \times_{\underline{k}} X, Y) = \mathcal{C}(T \times_{\underline{s}} X, Y)$; d'après 2.3.8, $\mathcal{C}(T \times_{\underline{s}} X, Y) = \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_c(X, Y))$, et $\mathcal{K}_e$ étant coréflexive, on a $\mathcal{C}(T, \mathcal{C}_c(X, Y)) = \mathcal{K}_e(T, \underline{k}(\mathcal{C}_c(X, Y)))$.

Mais une démonstration directe peut se faire de la manière suivante :

2.3.15. Proposition.- Soit X un espace de Kelley possédant une base de compacts convenables; le foncteur $T \mapsto T \times_{\underline{k}} X$ de $\mathcal{K}_e$ dans $\mathcal{K}_e$ possède un adjoint à droite.

Soit $\mathcal{K}$ la base de compacts convenables; on a :

$$T_{\star \underline{k}} X = \varinjlim \underline{k}(T) \otimes \underline{k}(X) = \varinjlim_{C \in \mathcal{K}(T), K \in \mathcal{K}} C \star K$$

car $\mathcal{K}(T) \otimes \mathcal{K}$ est cofinale dans $\mathcal{K}(T) \otimes \mathcal{K}(X)$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}e(T_{\star \underline{k}} X, Y) &= \mathcal{C}(\varinjlim C \star K, Y) \\ &= \varprojlim \mathcal{C}(C \star K, Y) \\ &= \varprojlim \mathcal{C}(C, \varprojlim_K \mathcal{C}_{\tau_K}(K, Y)) \\ &= \mathcal{C}(T, \varprojlim_K \mathcal{C}_{\tau_K}(K, Y)) \end{aligned}$$

et $\varprojlim_K \mathcal{C}_{\tau_K}(K, Y) = \mathcal{C}_{\tau}(X, Y)$ pour une certaine topologie τ .

La démonstration s'achève comme celle du corollaire précédent. Là encore nous avons perdu de l'information sur la topologie de l'espace $\underline{k}(\mathcal{C}_{\tau}(X, Y))$.

2.3.16. Remarque : si pour tout $K \in \mathcal{K}$, la topologie τ_K est la topologie de convergence compacte (ou uniforme), ce qui a bien lieu si les K sont localement compacts, on montre facilement que $\varprojlim \mathcal{C}_c(K, Y) = \mathcal{C}_c(X, Y)$.

Cas des espaces séparés et accessibles.

Pour les espaces séparés les conditions restrictives tombent d'elles-mêmes, puisque les compacts séparés sont localement compacts. Le corollaire 2.3.14 et la proposition 2.3.15 s'expriment alors sous la forme :

2.3.17. Théorème.- Tout espace de Kelley séparé est convenable dans la catégorie des espaces de Kelley (resp. dans la catégorie des espaces de Kelley séparés).

Ce résultat est par ailleurs conséquence d'un théorème de

E.Spanier ([S₂], lemme 5.6) en se servant des propriétés générales des objets $\mathcal{K}$ -convenables (cf. 1.3). La propriété 2.3.14 constitue donc une généralisation du théorème de Spanier.

Mais les résultats les plus intéressants proviennent du contre-exemple suivant, établi pour les espaces séparés dans [P.R₁].

2.3.18. Théorème.— Soit X un espace accessible non ponctuellement compact; il existe un espace séparé X_0 tel que $X_0 \times_{\underline{S}} X \neq X_0 \times X$.

On construit l'espace X_0 de la façon suivante : soit $x_0 \in X$ un point qui ne possède pas de voisinage compact; on vérifie aisément que l'ensemble des parties $\{x\}$ pour $x \neq x_0$ et $\{x_0\} \cup [K$, pour K compact dans X , forme une base d'ouverts pour une topologie séparée sur l'ensemble X ; on note X_0 cet espace séparé.

Soit $A = \Delta_X - \{(x_0, x_0)\}$; c'est un fermé de $X_0 \times_{\underline{S}} X$: il est évident que pour tout $x \in X_0$, $A \cap (\{x\} \times X)$ est fermé; soit alors K un compact de X et $(x, x') \in X_0 \times K$; si $x \neq x_0$ et $x \neq x'$, il existe un voisinage V de x' dans X tel que $x \notin V$, et $\{x\} \times (V \cap K)$ est un voisinage de (x, x') dans $X_0 \times K$ qui ne rencontre pas A ; si $x = x_0$, soient $W = \{x_0\} \cup [K$ le voisinage de x_0 dans X_0 défini par K et V un voisinage arbitraire de x' dans X ; alors $W \times (V \cap K)$ est un voisinage de (x_0, x') dans $X_0 \times K$, tel que $(W \times (V \cap K)) \cap A = \emptyset$.

Par contre, pour tout voisinage $W \times V$ de (x_0, x_0) dans $X_0 \times X$, où $W = \{x_0\} \cup [K$, le compact $K \cup \{x_0\}$ n'est pas un voisinage de x_0 dans X , donc $V \cap ((K \cup \{x_0\}) \neq \emptyset$, et il existe $x \neq x_0$ tel que $(x, x) \in W \times V$.

Les conséquences de ce contre-exemple constituent des réci-

proques partielles de 2.1.6 ; tout d'abord :

2.3.19. Théorème.- Tout espace X , accessible, convenable dans $\mathcal{C}$, tel que l'adjoint à droite à π_X soit $\mathcal{C}_C(X, .)$, est ponctuellement compact.

D'après 2.3.2, pour tout espace T , $T_{\underline{a}}X = T \star X$, et d'après 2.3.7, $T_{\underline{s}}X = T \star X$.

2.3.20. Corollaire.- Soit X un espace accessible, convenable dans $\mathcal{C}$, possédant une base de compacts localement compacts, et tel que l'adjoint à droite à π_X soit $\mathcal{C}_C(X, .)$; alors X est localement compact.

Cela résulte immédiatement de la remarque 2.3.9.c.

2.4. Les espaces de Kelley de la catégorie $\mathcal{C}_f$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la catégorie des espaces topologiques satisfaisants à l'axiome (CF) (cf. Introduction). Le théorème 2.2.5 assure la stabilité de cette catégorie pour le Kelleyifié d'un espace. Par ailleurs, et pour les mêmes raisons que dans la catégorie $\mathcal{C}_f$, tout objet de Kelley dans $\mathcal{C}_f$ relativement à $\mathcal{K}$ est un espace de Kelley. Si l'on remarque que tout espace appartenant à $\mathcal{C}_f$ est accessible, tout espace (CF) localement compact est régulier, donc séparé. Par contre un espace compact (CF) ne possède pas cette propriété, comme le montre le "compactifié" d'Alexandroff de $\mathbb{Q}$ (cf. $[W_2]$).

J. de Groot dans $[G_2]$ a indiqué une méthode permettant de caractériser les espaces de Kelley dans $\mathcal{C}_f$. Pour cela on remarque que l'ensemble $K(X)$ des parties compactes d'un espace (CF)

auquel on adjoint éventuellement l'espace X lui-même, s'il n'est pas compact, vérifie les axiomes des fermés pour une nouvelle topologie sur X . On notera X^* l'espace topologique ainsi obtenu, et on vérifie aisément qu'il est compact et accessible. De plus X^* vérifie l'axiome suivant :

(c*) Une partie de X est compacte ssi elle rencontre chaque fermé propre suivant un ensemble fermé.

Remarquons qu'un espace qui satisfait à l'axiome (c*) est compact; réciproquement tout espace compact vérifie la partie suffisante de l'axiome (c*), mais en général pas la partie nécessaire.

On rappelle la définition des systèmes centrés, utilisés souvent par les topologues russes; c'est en fait la notion de famille génératrice d'un filtre, mais nous pensons que le langage est particulièrement commode dans les questions que nous voulons traiter.

2.4.1. Définition.— On dit qu'une famille $(S_i)_{i \in I}$ de parties

d'un ensemble X est un système centré sur une partie A de X , si pour toute partie finie $J \subset I$, $A \cap \bigcap_{i \in J} S_i \neq \emptyset$. Une famille telle que $A \cap \bigcap_{i \in I} S_i \neq \emptyset$ est un système fixé sur A .

Si $A = X$, on dira simplement système centré (resp. fixé).

Si $(S_i)_{i \in I}$ est un système centré sur A , la famille obtenue en ajoutant A aux S_i est un système centré.

Dans un espace topologique une partie A est compacte ssi tout système centré sur A formé de fermés est fixé, ce qu'on

exprime encore sous la forme :

2.4.2. Lemme.- Soit $(S_i)_{i \in I}$ un système centré; si l'un des S_i est compact et les autres fermés, le système est fixé.

Parmi les propriétés citées par J. de Groot, on a en particulier :

2.4.3. Proposition.- Toute partie fermée de X est une partie compacte de X^* .

En effet, soit $(S_i)_{i \in I}$ un système centré sur F , formé de fermés de X^* , i.e. de compacts de X ; si F est fermé dans X , le lemme et l'axiome (CF) montrent que le système $(S_i) \cup \{F\}$ est fixé.

Ce résultat incite à caractériser les parties compactes de X^* de la façon suivante : ce sont les parties D de X , telles que tout système centré sur D formé de compacts de X soit fixé. J. de Groot nomme de telles parties "square-compact" ; pour la commodité des énoncés suivants on les appellera 2-compacts, mais leurs propriétés ne seront pas évoquées (cf. $[G_2], [P.R_1]$). Enfin on désignera par (G_1) la propriété donnée en 2.4.3, qui s'exprime alors :

(G_1) Tout fermé de X est 2-compact.

Si cette propriété n'est vraie que pour les fermés propres, on la désignera par (G'_1) .

2.4.4. Proposition.- Dans un espace X appartenant à $\mathcal{Cf}$, les propriétés suivantes sont équivalentes pour une partie D de X :

- a) D est un k -fermé;
- b) D est un 2-compact.

Preuve : soit D un k -fermé de X et soit $(S_i)_{i \in I}$ un système centré sur D formé de compacts; pour tout $i \in I$, $D \cap S_i$ est fermé dans S_i , donc compact et fermé dans X ; la famille $(D \cap S_i)_{i \in I}$ est un système centré dans X , donc est fixé d'après 2.4.2, et de plus $D \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} (D \cap S_i)$. Réciproquement soient D un 2-compact et C un compact; un système centré fermé sur $D \cap C$ coupe C suivant un système centré compact sur D , donc est fixé sur $D \cap C$; celui-ci est donc compact, et fermé, et D est k -fermé.

2.4.5. Corollaire.- Pour un espace (CF) les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est un espace de Kelley;
- b) les compacts de X^* sont exactement les fermés de X .

Pour des raisons de symétrie on désignera par (G_2) l'axiome :

(G_2) Tout 2-compact de X est fermé.

La conjonction de (G_1) (resp. (G'_1)) et (G_2) sera notée (G) (resp. (G')). Ainsi un espace (CF) est un espace de Kelley ssi il vérifie (G) . On appellera espace de deGroot un espace satisfaisant à (G') .

On donne maintenant quelques propriétés de la catégorie $\mathcal{C}^*$ suivante : les objets de $\mathcal{C}^*$ sont les espaces topologiques satisfaisant à (C^*) ; pour éviter les confusions on les notera $L, M, \dots$; Les morphismes de $\mathcal{C}^*$ sont les applications compactes : ce sont les applications $f : L \rightarrow M$ telles que pour toute partie compacte C de M , $\bar{f}^{-1}(C)$ soit compacte dans L . Cette propriété est bien entendue liée aux applications propres (ou parfaites).

2.4.6. Proposition.- a) Tout espace appartenant à $\mathcal{C}^*$ est compact et satisfait à (G'_1) ;
 b) tout espace satisfaisant à (G') appartient à $\mathcal{C}^*$.

La première assertion de a) est évidente; soit F un fermé propre de L , et soit $(S_i)_{i \in I}$ un système centré compact sur F ; la famille $(F \cap S_i)_{i \in I}$ est un système centré fermé sur L (d'après (c^*)), et comme L est compact, ce système est fixé, et (S_i) est fixé sur F . Soit maintenant L un espace compact satisfaisant à (G') : soient C un compact de L et F un fermé propre de L ; F est 2-compact d'après (G'_1) ; on vérifie aisément que $C \cap F$ est 2-compact (cf. $[G_2]$) donc fermé d'après (G_2) , ce qui donne la condition nécessaire de (c^*) , la condition suffisante étant acquise pour tout espace compact.

On trouvera d'autres propriétés des espaces de $\mathcal{C}^*$ dans $[P.R_1]$.

Remarquons maintenant que pour un objet L de $\mathcal{C}^*$ l'ensemble $\mathcal{K}(L)$ satisfait aux axiomes des fermés et définit ainsi une topologie sur l'ensemble L qui est plus fine que celle de L . On note L^+ ce nouvel espace topologique; tout compact de L^+ est compact dans L et par suite fermé dans L^+ ; autrement dit $L^+ \in \mathcal{C}_f$.

2.4.7. Théorème.- Pour tout espace L appartenant à $\mathcal{C}^*$, l'espace L^+ est un espace de Kelley dans $\mathcal{C}_f$.

Considérons l'espace L^{+*} ; sa topologie est plus fine que celle de L , car un fermé de L est un compact de L^+ (même preuve que 2.4.3); par suite tout compact de L^{+*} l'est aussi dans L , et est fermé dans L^+ , d'où le résultat d'après 2.4.5.

2.4.8. Corollaire.- Soit X un espace appartenant à $\mathcal{C}_f$; l'espace X^{*+} n'est autre que le Kelleyifié de X .

Ce résultat permet entre autre de montrer la fonctorialité de $\kappa : \mathcal{C}_f \rightarrow \mathcal{C}^*$ de façon simple; en effet, si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, la même application $f : X^{*+} \rightarrow Y^{*+}$ est encore continue (propriété des Kelleyifiés) et par suite l'image réciproque par f d'un compact de Y^* est un compact de X^* . Il est par ailleurs évident que $\kappa : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}_f$ est un foncteur; on a alors :

2.4.9. Proposition (de Groot).- Le couple (κ, κ) est une adjonction entre les catégories $\mathcal{C}^*$ et $\mathcal{C}_f$.

Il faut donc établir une bijection (naturelle) entre $\mathcal{C}_f(L^+, X)$ et $\mathcal{C}^*(L, X^*)$. Soit $f : L^+ \rightarrow X$ une application continue : pour tout compact C de X , i.e. pour tout fermé de $X^{*+} = \underline{k}X$, le sous-ensemble $\tilde{f}^1(C)$ est fermé dans L^+ , car $f : L^+ \rightarrow \underline{k}X$ est continue d'après 2.4.7; donc $f : L \rightarrow X^*$ est compacte. Si g est maintenant une application compacte de L dans X^* , soit F un fermé de X , c'est un compact de X^* (2.4.3) donc son image réciproque est un compact de L , i.e. un fermé de L^+ d'après 2.4.5.

Si l'on désigne par $\mathcal{G}(\mathcal{C}^*)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^*$ constituée par les espaces de deGroot compacts (2.4.6), et si l'on tient compte du fait que $\mathcal{K}e(\mathcal{C}_f, \mathcal{K}) = \mathcal{K}e(\mathcal{C}, \mathcal{K}) \cap \mathcal{C}_f$, l'équivalence des deux catégories $\mathcal{G}(\mathcal{C}^*)$ et $\mathcal{K}e(\mathcal{C}_f, \mathcal{K})$ résulte de :

2.4.10. Proposition.- Soit X un espace compact; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est un espace de deGroot;
- b) il existe un espace de Kelley Y appartenant à $\mathcal{C}^f$ tel que $X = Y^*$;
- c) il existe un espace Y appartenant à $\mathcal{C}^f$ tel que $x = Y^*$.

Il est remarquable que dans cette équivalence certaines propriétés des espaces se conservent, en particulier la locale compacité.

On peut caractériser les espaces localement compacts appartenant à $\mathcal{C}^f$ de la façon suivante :

(LC*) Pour tout couple (x, y) de points distincts de X , il existe un compact C et un fermé F tels que : $x \in C$, $y \in F$, $x \notin F$, $y \notin C$ et $X = C \cup F$.

2.4.11. Proposition.- Un espace appartenant à $\mathcal{C}^f$ est localement compact, donc séparé, ssi il vérifie (LC*).

La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si X satisfait à (CF) et (LC*), il est séparé et ponctuellement compact.

On obtient alors le théorème fondamental suivant :

2.4.12. Théorème.- Soit X un espace de Kelley appartenant à $\mathcal{C}^f$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est localement compact;
- b) X satisfait à (LC*);
- c) X^* est localement compact;
- d) X^* satisfait à (LC*).

Preuve : il suffit de montrer $b \Rightarrow c$ et $d \Rightarrow a$.

$b \Rightarrow c$: soit $x \in X^*$ et soit U un voisinage ouvert de x (dans X^*) ;
 $F = \{ U \text{ est un fermé de } X^* \text{ donc un compact de } X ; \text{ pour tout } y \in F$
 il existe donc un fermé F_y et un compact C_y (dans X) tels que
 $x \in F_y, y \in C_y, F_y \cup C_y = X$ et $F_y \cap C_y \cap \{x, y\} = \emptyset$. Comme $F \cap \bigcap F_y = \emptyset$
 il existe une famille finie $y_1, \dots, y_n$ de points de F tels que
 les fermés $F_1, \dots, F_n$ correspondants vérifient $F \cap \bigcap F_k = \emptyset$. Posons
 $C = \bigcap F_k$ et $V = \bigcup C_k$. C est un compact de X^* et V un ouvert
 de X^* et de plus $x \in V \subset C \subset U$.

$d \Rightarrow a$: la démonstration est identique à la précédente en remarquant cependant que l'hypothèse " X est un espace de Kelley" est utilisée pour passer des compacts de X^* aux fermés de X .

2.4.13. Corollaire. - Le Kelleyifié d'un espace satisfaisant à
 (CF) est localement compact ssi X^* est localement compact.

Le théorème 2.4.12 et l'équivalence des catégories $\mathcal{G}(\mathcal{C}^*)$ et $\mathcal{K}e(\mathcal{C}f, \mathcal{K})$ mettent en évidence le "nombre" important d'espaces compacts, localement compacts, accessibles, et non séparés, donc non réguliers, ce qui accentue le caractère pathologique des espaces localement compacts réguliers non séparés. Par contre la condition, rencontrée au paragraphe précédent, de posséder une base de compacts localement compacts, est ici trivialement vérifiée pour les espaces localement compacts de $\mathcal{G}(\mathcal{C}^*)$.

2.5. Les espaces fonctionnellement séparés et les espaces complètement réguliers.

Les deux catégories $\mathcal{CF}$ et $\mathcal{CR}$ sont étroitement apparentées. Certains résultats sur les espaces fonctionnellement séparés

ont été donnés dans $[B_6]$. Remarquons ici que si les espaces complètement réguliers sont exactement les sous-espaces des espaces compacts séparés, les espaces fonctionnellement séparés sont exactement les sous-objets des espaces compacts séparés; on peut par exemple s'en assurer, en notant que $I = [0,1]$ est un séparateur de la catégorie $\mathcal{K}\mathcal{P}$ et que $\mathcal{CF}$ est la plus grande sous-catégorie de $\mathcal{C}$ admettant I comme séparateur; par suite tout objet de $\mathcal{CF}$ est un sous-objet d'un I^A où A est un ensemble arbitraire, ce qui donne le résultat d'après le théorème de Tychonoff. On verra dans la suite une autre démonstration de cette remarque.

On va maintenant montrer que ces deux catégories sont réflexives dans $\mathcal{C}$, ce qui est bien connu (cf. e.g. $[G.J]$), mais n'a pas toujours été utilisé systématiquement (pour s'en convaincre il suffit de lire quelques résultats récents, qui seront cités en leur temps, et qui sont conséquences directes de cette propriété, dont les démonstrations empruntent des voies très éloignées de ce résultat général).

Rappelons que pour un espace topologique quelconque X on peut répéter, mutatis mutandis, l'une des constructions du compactifié de Stone-Čech d'un espace complètement régulier, sans modifier fondamentalement la solution du problème universel posé. Seuls les rapports de l'espace avec son "compactifié" sont transformés, conformément au "lemme de plongement" de $[K_1]$, 4.5. Si par exemple on utilise l'espace des caractères de

l'algèbre de Banach $\mathcal{C}^*(X)$, muni de la topologie de convergence simple sur $\mathcal{C}^*(X)$, on obtient un espace compact séparé βX , et la transformation de Dirac $x \mapsto \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{x}(f) = f(x)$) définit une application continue $X \rightarrow \beta X$, dont l'image ρX est partout dense dans βX .

2.5.1. Proposition.- L'application $X \mapsto \rho X$ définit un foncteur (covariant) ρ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{CR}$, adjoint à gauche au foncteur injection $\mathcal{CR} \rightarrow \mathcal{C}$.

En effet, soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue; la restriction ρf à ρX de $\beta f : \beta X \rightarrow \beta Y$ a son image dans ρY , et est continue, car ρY est un sous-espace de βY . On a ainsi le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & \rho X & \longrightarrow & \beta X \\ \downarrow f & & \downarrow \rho f & & \downarrow \beta f \\ Y & \longrightarrow & \rho Y & \longrightarrow & \beta Y \end{array}$$

Si Y est complètement régulier, l'égalité $Y = \rho Y$ (lemme cité) et le fait que $X \rightarrow \rho X$ est surjective, montrent que

$$\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{CR}(\rho X, Y).$$

2.5.2. Remarque (cf. [G.J]) : soit R la relation d'équivalence sur X définie par : " $xRx' \iff$ quel que soit $f \in \mathcal{C}(X)$, $f(x) = f(x')$ ". L'espace γX peut être considéré comme le quotient complètement régulier de X par R . En effet, l'espace quotient $\gamma X = X/R$ est fonctionnellement séparé et on a $\mathcal{C}(\gamma X) = \mathcal{C}(X)$, ainsi que $\mathcal{C}^*(\gamma X) = \mathcal{C}^*(X)$; par suite $\beta X = \beta(\gamma X)$ et, toujours

d'après le même lemme, il existe une bijection continue de φX sur ρX ; ce dernier espace est donc obtenu en mettant sur φX la topologie initiale associée aux fonctions continues de φX dans $\mathbb{R}$. De façon plus précise :

2.5.3. Proposition.- L'application $X \mapsto \varphi X$ définit un foncteur (covariant) de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{CF}$, adjoint à gauche au foncteur injection de $\mathcal{CF}$ dans $\mathcal{C}$. De plus $\rho(\varphi X) = \rho X$.

Le lecteur vérifiera aisément ces assertions.

2.5.4. Lemme.- Soient X un espace fonctionnellement séparé et $p : X \rightarrow Y$ une surjection continue, telle que $p^{\mathbb{R}} : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ soit surjective; alors Y est fonctionnellement séparé et p est injective.

Preuve : soient y et y' deux points distincts de Y ; il existe x et x' dans X tels que $p(x) = y$ et $p(x') = y'$, et il existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tel que $f(x) \neq f(x')$; soit $g \in \mathcal{C}(Y)$ telle que $f = g \circ p$; on a $g(y) \neq g(y')$. Une démonstration analogue montre la deuxième assertion. Si Y ne comportait qu'un seul point, il en serait de même de X .

Ce lemme va nous donner une caractérisation intéressante de ρX , mais malheureusement pas de φX , car la complète régularité intervient expressément.

2.5.5. Proposition.- Soit X un espace topologique, soient Y un espace complètement régulier et $p : X \rightarrow Y$ une surjection continue; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $p^{\mathbb{R}} : \mathcal{C}(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ est une surjection;
- b) $\rho p : \rho X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme.

L'implication $b \Rightarrow a$ est triviale, et d'après le lemme, p est un bimorphisme. Or quel que soit $f \in \mathcal{C}(pX)$, $f \circ p \in \mathcal{C}(Y)$, ce qui assure le résultat puisque pX est complètement régulier.

On est maintenant en mesure d'étudier la commutation des foncteurs φ et p aux produits directs.

2.5.6. Théorème.— Soient X un espace topologique et Y un espace fonctionnellement séparé; le morphisme canonique $\varphi(X \times Y) \rightarrow \varphi X \times Y$ est une bijection.

Il suffit de montrer que les relations d'équivalence suivantes sur $X \times Y$ coïncident :

$$R_1 : (x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{C}(X \times Y), g(x, y) = g(x', y').$$

$$R_2 : (x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow y = y' \text{ et } \forall f \in \mathcal{C}(X), f(x) = f(x').$$

L'équivalence R_1 est plus fine que R_2 , d'après le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 \times 1_Y \\ p(X \times Y) & \longrightarrow & pX \times Y \end{array}$$

En particulier, $(x, y) R_1 (x', y')$ implique $y = y'$.

Réciproquement, si $g \in \mathcal{C}(X \times Y)$ sépare (x, y) et (x', y) , alors g_y sépare x et x' .

2.5.7. Corollaire.— Soit X un espace topologique; pour tout espace complètement régulier Y , l'application continue canonique $p(X \times Y) \rightarrow pX \times Y$ est une bijection.

Il serait intéressant de connaître dans quels cas la bijection précédente est un homéomorphisme. Comme toujours on possède

quelques réponses partielles, plus ou moins liées aux espaces convenables; rappelons tout d'abord un résultat de Arens-Dugundji.

2.5.8. Théorème.— Soit X un espace fonctionnellement séparé; si

ρX vérifie la propriété suivante :

(I) Tout $x \in X$ possède un système fondamental de voisinages de la forme $U - F$, où U est ouvert dans ρX , F est fermé dans X , et l'intérieur de $U \cap F$ dans ρX est vide.

alors pour tout espace Y et toute application $g \in \mathcal{C}(X \times Y)$, g appartient également à $\mathcal{C}(\rho X \times Y)$.

Preuve : soient $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, $t = g(x_0, y_0)$ et $\varepsilon > 0$; il existe un voisinage $(U - F) \times V$ de (x_0, y_0) dans $X \times Y$ tel que $g((U - F) \times V) \subset]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$. Soit $x' \in U \cap F$; comme $g_y \in \mathcal{C}(X)$ pour tout $y \in Y$, g_y est continue de ρX dans $\mathbb{R}$; il existe donc un voisinage U_y de x' dans ρX , tel que

$$|g_y(x) - g_y(x')| < \varepsilon$$

pour tout $x \in U_y$. Si $(x', y) \in (U \cap F) \times V$, en choisissant $x \in U_y \cap (U - F)$, il vient :

$$|g(x', y) - g(x_0, y_0)| \leq |g(x', y) - g(x, y)| + |g(x, y) - g(x_0, y_0)| < 2\varepsilon$$

et $g(U \times V) \subset]t - 2\varepsilon, t + 2\varepsilon[$.

Dans [A.D] on montre que la condition (I) est réalisée si ρX satisfait au premier axiome de dénombrabilité (lemme 5.31). On déduit de ceci un certain nombre de corollaires :

2.5.9. Corollaire.— Soit X un espace fonctionnellement séparé;

si ρX vérifie la condition (I), pour tout espaces Y complètement régulier on a $\rho(X \times Y) = \rho X \times Y$.

2.5.10. Corollaire.- Soient X et Y deux espaces fonctionnellement séparés, tels que pX et pY vérifient la condition (I); alors $p(X \times Y) = pX \times pY$.

Dans une autre direction, en utilisant les espaces convénables, on obtient :

2.5.11. Théorème.- Soit Y un espace localement compact séparé; pour tout espace X on a $p(X \times Y) = pX \times pY$.

L'application $p : X \times Y \rightarrow pX \times pY$ définit la bijection

$$p^* : \mathcal{C}(pX \times pY) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(pX, \mathcal{C}_c(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X, \mathcal{C}_c(Y)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(X \times Y)$$

car $\mathcal{C}_c(Y)$ est complètement régulier; d'après la proposition 2.5.5 $pX \times pY$ est homéomorphe à $p(X \times Y)$.

2.5.12. Corollaire.- Soit X un espace de Kelley séparé et soit Y un espace tel que pY soit localement compact; alors :

$$p(X \times Y) = pX \times pY.$$

Il suffit de montrer que toute application continue g de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$ se factorise à travers $X \times pY$. Or, pour tout compact $C \subset X$, la restriction f_C de f à $C \times Y$ se factorise en $\bar{f}_C$ à travers $C \times pY$, d'après 2.5.11; comme le produit par pY commute aux limites à droite et que les $\bar{f}_C$ forment un cône inductif, ils définissent une application continue $\bar{f} : X \times pY \rightarrow \mathbb{R}$ qui factorise f . Une dernière application de 2.5.11 donne le résultat.

2.5.13. Corollaire (Steenbrink).- Soient X et Y deux espaces fonctionnellement séparés tels que pX et pY soient compacts. Si l'un d'eux est un espace de Kelley, $p(X \times Y)$ est compact.

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent. Ce résultat

est intéressant en ce sens que les espaces ainsi décrits sont exactement les espaces topologiques qui satisfont au théorème de Stone-Weierstrass (cf. $[B_3]$ et $[S_4]$).

Enfin en combinant les deux méthodes on obtient par exemple :

2.5.14. Proposition. - Soient X et Y deux espaces fonctionnellement séparés; si ρX satisfait au premier axiome de dénombrabilité et si ρY est localement compact, $\rho(X \times Y) = \rho X \times \rho Y$.

En effet, $\rho(X \times Y) = \rho(\rho X \times Y)$ d'après 2.5.8 et comme ρX est un espace de Kelley, on applique le corollaire 2.5.12 pour achever la preuve.

2.6. Compactologies et espaces de Kelley dans $\mathcal{CK}$.

Résumons rapidement les notions essentielles sur les espaces compactologiques étudiées par H. Saxon dans $[B_5]$ et $[B_6]$. Ce paragraphe sert de transition avec le troisième chapitre, où l'on donnera une généralisation des espaces compactologiques, plus appropriée à l'étude de certaines structures uniformes (complétion universelle et replétion).

Un espace compactologique est la donnée d'un ensemble X et d'un recouvrement filtrant à droite $\mathcal{K}$ de X satisfaisant aux axiomes suivants :

- (K₁) Pour tout $K \in \mathcal{K}$ il existe une topologie τ_K compacte, séparée, sur K .
- (K₂) Pour tous $H \in \mathcal{K}$, $K \in \mathcal{K}$, $H \subset K$, la topologie τ_H est la topologie induite par τ_K sur H .
- (K₃) Pour tout $K \in \mathcal{K}$, et toute partie $H \subset K$, l'adhérence

$\overline{H}$ de H dans K est élément de $\mathcal{K}$.

Les espaces compactologiques forment une catégorie $\mathcal{CE}$, dont les morphismes sont les applications $f : (X, \mathcal{K}) \rightarrow (Y, \mathcal{L})$ telles que pour tout $K \in \mathcal{K}$, il existe $L \in \mathcal{L}$, tel que $f(K) \subset L$ et $f|_K : K \rightarrow L$ soit continue.

2.6.1. Définition.- Soit T un espace topologique, τ sa topologie; soit $\mathcal{K}$ une compactologie sur T ; on dit que $\mathcal{K}$ est compatible avec τ si pour tout $K \in \mathcal{K}$, on a $\tau_K = \tau|_K$.

Nous allons étudier dans ce paragraphe les liaisons entre topologies complètement régulières et compactologies. Dans les travaux cités, Buchwalter définit un foncteur $\gamma : \mathcal{CE} \rightarrow \mathcal{CT}$, en associant à tout espace séparé la famille $\mathcal{K}(T)$ de ses parties compactes. D'autre part on définit un foncteur $\underline{c} : \mathcal{CE} \rightarrow \mathcal{C}$ en munissant l'ensemble X support de la compactologie $\mathcal{K}$ de la topologie finale associée aux injections $K \rightarrow X$. On dit qu'un espace compactologique est régulier s'il est séparé par les morphismes compactologiques à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On désigne par $\mathcal{CE}\mathcal{R}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{CE}$ formée par les espaces compactologiques réguliers. En restreignant les foncteurs $\underline{c}$ et γ respectivement à $\mathcal{CE}\mathcal{R}$ et $\mathcal{CT}$, on a :

2.6.2. Proposition (Buchwalter).- Le couple $(\underline{c}, \gamma)$ est une adjonction entre $\mathcal{CE}\mathcal{R}$ et $\mathcal{CT}$.

Enfin pour tout espace séparé T , l'espace $\underline{c}, \gamma T$ n'est autre que le Kelleyifié $\underline{k}T$ de T .

Soit maintenant $(X, \mathcal{K})$ un espace compactologique; munissons

$\mathfrak{X}$ de la topologie initiale associée aux morphismes compactologiques de $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ dans $\mathbb{R}$. On obtient ainsi un foncteur, noté $\underline{c}_R$, de la catégorie $\mathcal{CT}$ dans celle des espaces uniformisables. Il est facile de vérifier le :

2.6.3. Théorème.- L'espace compactologique $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ est régulier
 | ssi $\underline{c}_R(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ est complètement régulier.

Comme, d'après 2.6.2, γT est régulier pour un espace T fonctionnellement séparé, on a, en se restreignant à $\mathcal{ER}$:

2.6.4. Proposition.- Le couple $(\underline{c}_R, \gamma)$ est une adjonction entre
 | les catégories $\mathcal{ER}$ et $\mathcal{ER}$.

Remarquons d'abord que si T est un espace complètement régulier, l'espace topologique $\underline{c}_R \circ \gamma T$ est plus fin que T , car toute fonction continue de T dans $\mathbb{R}$ est un morphisme compactologique de γT dans $\gamma \mathbb{R}$; soit alors $f : \mathfrak{X} \rightarrow \gamma T$ un morphisme compactologique; f est une application continue de $\underline{c}_R \mathfrak{X}$ dans $\underline{c}_R \circ \gamma T$, donc dans T . La réciproque provient du fait que la compactologie $\mathcal{K}$ sur $\mathfrak{X}$ est compatible avec la topologie de $\underline{c}_R(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ (cf. [B₆], th.1.1.3).

On désigne maintenant par $\underline{k}_R$ le foncteur composé $\underline{c}_R \circ \gamma$ de $\mathcal{CT}$ dans $\mathcal{ER}$.

2.6.5. Théorème.- Les espaces complètement réguliers T qui vérifient $T = \underline{k}_R T$ sont exactement les objets de Kelley de la
 | catégorie $\mathcal{ER}$ relativement à $\mathcal{KS}$.

Cela résulte immédiatement de la comparaison des trois foncteurs $\underline{k}$, ρ et $\underline{k}_R$ (ou $\underline{c}$, γ et $\underline{c}_R$). En effet, on a $\rho \circ \underline{k} T = \underline{k}_R T$

pour tout espace fonctionnellement séparé T (ou $p \circ c = c_R$).

D'autre part on sait que les limites à droite dans la catégorie $\mathcal{CR}$ se construisent de la façon suivante : soit $f : J \rightarrow \mathcal{CR}$ un petit foncteur et $i : \mathcal{CR} \rightarrow \mathcal{C}$ l'injection canonique; on a :

$$\varinjlim f = p(\varinjlim i \circ f).$$

Par suite le petit foncteur $\underline{k}(T) : \mathcal{K}(T) \rightarrow \mathcal{CR}$ permet d'écrire

$$\varinjlim \underline{k}(T) = p(\varinjlim i \circ \underline{k}(T)) = p \circ k_T = k_R T,$$

et si T est un objet de Kelley dans $\mathcal{CR}$, $T = k_R T$.

Les objets de Kelley de $\mathcal{CR}$ sont appelés les k_R -espaces.

Ce qui distingue la catégorie $\mathcal{CR}$ des autres catégories déjà étudiées est le fait que les objets de Kelley de $\mathcal{CR}$ ne sont pas nécessairement des espaces de Kelley; cela provient de la construction des limites à droite dans $\mathcal{CR}$ où l'on utilise des topologies initiales.

On va maintenant donner quelques propriétés des compactologies compatibles. Dans le théorème précédent la compactologie utilisée est la canonique, qui est trivialement compatible.

Soit $(X, \mathcal{K})$ un espace compactologique régulier; la compactologie $\mathcal{K}$ est compatible avec la topologie de $c_R X$ mais en général elle est assez éloignée de la compactologie canonique de $c_R X$; cependant $c_R X$ est un k_R -espace de façon évidente.

2.6.6. Définition.- Soit T un espace topologique complètement régulier; on dit qu'une compactologie $\mathcal{K}$ sur T est couvrante si $c_R(T, \mathcal{K}) = T$.

Il est évident qu'une compactologie couvrante est compatible.

D'autre part pour qu'un espace complètement régulier possède une compactologie couvrante, il faut et il suffit que ce soit un k_R -espace. Les compactologies couvrantes et les notions dérivées trouveront leur emploi dans le chapitre suivant, aussi se propose-t-on de les caractériser au moyen de l'algèbre $\mathcal{C}(T)$. Soit $\mathcal{K}$ une compactologie compatible sur un espace T complètement régulier; on désigne par $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(T)$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs réelles munie de la topologie de la convergence sur les parties $K \in \mathcal{K}$. On rappelle que $\mathcal{CC}(X)$, l'algèbre des morphismes compactologiques de X dans $\mathbb{R}$ est complète quand on la munit de la topologie de la $\mathcal{K}$ -convergence. Puisque la compactologie $\mathcal{K}$ sur T est compatible, si $f \in \mathcal{CC}((T, \mathcal{K}))$, $f|_K$ se prolonge en une application continue $g_K : T \rightarrow \mathbb{R}$; par l'égalité des semi-normes $\|g_K\|_K = \|f\|_K = \sup_{t \in K} |f(t)|$, on voit que $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(T)$ est partout dense dans $\mathcal{CC}((T, \mathcal{K}))$. On a alors :

2.6.7. Théorème.- Soit $(T, \mathfrak{z})$ un espace complètement régulier, et soit $\mathcal{K}$ une compactologie sur T , compatible avec $\mathfrak{z}$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{K}$ est couvrante ;
- b) $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(T)$ est complète;
- c) $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(T)$ est quasi-complète.

Les implications $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ sont triviales; $c \Rightarrow a$ s'obtient de la même façon que dans le théorème de S. Warner ($[W_1]$, th.1), en tenant compte de la compatibilité de $\mathcal{K}$ avec $\mathfrak{z}$. On trouvera une démonstration rapide de cette implication dans $[B.J]$, th.1.3,

où il suffit de remplacer les "bornés" par les "compacts" de $\mathcal{K}$.

On verra au chapitre 3 que le théorème 1.3 de [B.J] devient lui-même un corollaire de 2.6.7.

Si l'on prend pour $\mathcal{K}$ la compactologie canonique de T , on obtient le théorème de S.Warner :

2.6.8. Corollaire (S.Warner) .- Pour un espace complètement ré-

gulier T les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) T est un k_R -espace;
- b) $\mathcal{C}_c(T)$ est complète;
- c) $\mathcal{C}_c(T)$ est quasi-complète.

Remarques sur les hypothèses de séparation.

1. On trouve dans $[B_1]$, §8, ex.10, un exemple d'espace de Kelley (séparé) T et d'une relation d'équivalence R sur T dont le graphe est fermé, et tel que T/R ne soit pas séparé. Or, si p est la surjection canonique de T sur T/R , on vérifie facilement que les $p(K)$, pour K compact de T , engendrent une compactologie sur T/R (le fait que les $p(K)$ soient séparés est conséquence du "graphe fermé"). Si on désigne par $\mathcal{K}$ l'espace compactologique ainsi obtenu, on a $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^* = T/R$. Il existe donc des espaces de Kelley non séparés qui sont limite d'une compactologie (séparée).

La question reste ouverte concernant l'existence d'espaces de Kelley non séparés, dont tous les compacts sont séparés (notons que la condition pour un espace d'avoir tous ses compacts séparés est intermédiaire entre l'axiome (CF) et l'axiome de Hausdorff).

2. Soit $\mathfrak{X}$ un espace compactologique; soit $K \in \mathcal{K}$, qui est un compact (séparé) de l'espace de Kelley $\underline{c}\mathfrak{X}$; si $x \notin K$, $K \cup \{x\} \in \mathcal{K}$, et par suite K est fermé dans $K \cup \{x\}$, donc $K = \overline{K}$. Soit maintenant C un compact quelconque de $\underline{c}\mathfrak{X}$; pour tout compact $K \in \mathcal{K}$, $C \cap K$ est fermé dans C , donc compact, donc fermé dans K , et C est fermé dans $\underline{c}\mathfrak{X}$: autrement dit $\underline{c}\mathfrak{X}$ satisfait à l'axiome (CF).

Par contre $\underline{c}_R\mathfrak{X}$ ne satisfait pas en général à l'axiome (T_0) , sinon il serait complètement régulier, et $\underline{c}\mathfrak{X}$ serait fonctionnellement séparé, ce qui contredirait la remarque 1.

Ch. III. Structures uniformes et foncteurs.

On se propose d'étudier de façon précise quatre foncteurs, et en particulier leur comportement vis à vis du produit. Les catégories mises en jeu sont la catégorie $\mathcal{CR}$ des espaces complètement réguliers et la catégorie $\mathcal{U}$ des espaces uniformes séparés. Les deux premiers foncteurs, qui ont été fort peu étudiés jusqu'à présent, sont d'une part le foncteur θ_u de complétion universelle, i.e. le foncteur qui à tout espace complètement régulier T associe son complété $\theta_u T$ pour la structure uniforme universelle compatible avec la topologie de T , et d'autre part le composé de θ_u avec le foncteur oubli de structure de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{CR}$; ce composé sera noté θ ; le foncteur θ sera appelé foncteur de c-replétion. Des deux autres foncteurs, l'un au moins est très connu dans la littérature américaine : c'est le foncteur ν de replétion (real-compactification). Il associe à tout espace complètement régulier T l'espace νT des caractères de l'algèbre $\mathcal{C}(T)$, muni de la topologie de convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$. Enfin $\nu_u T$ désignera l'espace uniforme des caractères de $\mathcal{C}(T)$ muni de la structure uniforme de convergence simple sur

$\mathcal{C}(T)$. Le foncteur $\mathcal{U}$ joue donc le même rôle par rapport à $\mathcal{U}_u$ que $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{C}_u$. La distinction dans ces deux couples de foncteurs n'a pas toujours été faite avec clarté, en particulier dans [B.P] et [P₀], et cela peut entraîner des ambiguïtés sinon des erreurs. Les études faites sur le foncteur $\mathcal{U}$ l'ont souvent été par analogie avec le foncteur $\mathcal{C}$, pour lequel il est inutile de parler de structure uniforme, celle-ci étant canoniquement liée à la topologie compacte de βT .

Dans tout le chapitre lorsqu'on parlera d'une structure uniforme sur un espace complètement régulier T , elle sera toujours compatible avec la topologie de T . Par exemple, $\mathcal{C}_u T$ induit sur T la plus fine structure uniforme compatible, $\mathcal{U}_u T$ induit sur T la moins fine structure uniforme rendant uniformément continues les applications continues de T dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; enfin βT induit sur T la plus fine structure uniforme précompacte. On utilisera parfois un franglaisisme commode, et l'on parlera de $\mathcal{C}$ -uniformité, $\mathcal{U}$ -uniformité, β -uniformité.

Les moyens mis en oeuvre dans ce chapitre sont essentiellement les propriétés des espaces convenables (c'est à dire des espaces localement compacts (séparés)) et les propriétés d'espaces proches parents des objets de Kelley de $\mathcal{CR}$. Par ailleurs on se référera souvent aux propriétés des compactologies et des compactologies vectorielles établies par H.Buchwalter. Je dois d'ailleurs souligner que sans le travail de celui-ci ([B₅]), ce chapitre n'aurait sans doute pas vu le jour.

3.1. Complétion et caractères.

On prolonge ici certains résultats acquis par H. Buchwalter et moi-même sur la complétion universelle. Sans faire un traitement exhaustif de la question, on détermine cependant complètement le complété séparé d'un espace uniforme au moyen d'ensembles de formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(T)$ des applications uniformément continues de T dans $\mathbb{R}$.

Rappelons quelques résultats concernant les écarts et les parties uniformément équicontinues. On sait qu'une structure uniforme (séparée ou non) sur un ensemble T peut-être définie par une famille $\mathcal{D}$ d'écarts, et qu'on peut toujours supposer ces écarts bornés; un écart $d \in \mathcal{L}$ est uniformément continu pour la structure uniforme produit sur $T \times T$; on dira que $\mathcal{D}$ est saturée si elle contient tous les écarts (bornés) uniformément continus sur $T \times T$. Dans la suite $\mathcal{L}$ sera toujours saturée. D'autre part soit $H \subset \mathcal{C}(T)$ une partie uniformément équicontinue; si $h \in H$, l'application h est uniformément continue (donc $H \subset \mathcal{U}(T)$); on pose :

$$d_H(x, x') = \sup_{h \in H} |h(x) - h(x')| .$$

L'application $d_H : T \times T \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un écart non nécessairement fini; si H est simplement bornée, d_H est fini, et si H est uniformément bornée, d_H est borné. On a alors le lemme :

3.1.1. Lemme.— Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $H \subset \mathcal{U}(T)$ est uniformément équicontinue et bornée;
- b) $d_H \in \mathcal{D}$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, si H est uniformément équicontinue, il existe un écart $d \in \mathcal{D}$ et un réel $\alpha > 0$, tels que :

$$d(x, x') < \alpha \quad \Rightarrow \quad d_H(x, x') < \varepsilon ,$$

ce qui montre que $d_H \in \mathcal{D}$ (cf. [G.J]). La réciproque est évidente.

On suppose maintenant que l'espace uniforme T est séparé. Les applications $f \in \mathcal{U}(T)$ séparent T (en effet, si $x \neq x'$, il existe $d \in \mathcal{D}$ tel que $d(x, x') \neq 0$; alors $t \mapsto d(t, x')$ est uniformément continue et sépare x et x'). Par suite T peut être plongé dans $\mathcal{E}(\mathcal{U}(T), \mathbb{R})$, par la transformation de Dirac $x \mapsto \hat{x}$. On munit $\mathcal{U}(T)$ de la famille $\mathcal{K}$ des parties H uniformément équicontinues. La structure uniforme de la $\mathcal{K}$ -convergence sur $\mathcal{E}(\mathcal{U}(T), \mathbb{R})$ induit sur T une structure uniforme dont les écarts sont justement les d_H , et les écarts bornés sont les d_H obtenus à partir des H uniformément bornées. Ceci montre que la structure uniforme de T est plus fine que la structure uniforme de la $\mathcal{K}$ -convergence. Réciproquement, d'après ([B₂], §1, prop.2) tout écart borné $d \in \mathcal{D}$ définit une partie uniformément équicontinue et uniformément bornée $H = \{d(t, .) / t \in T\}$, et on a de plus $d_H = d$.

3.1.2. Théorème.- Soit T un espace uniforme séparé. Sa structure uniforme est exactement la structure uniforme sur T de la $\mathcal{K}$ -convergence sur $\mathcal{U}(T)$, où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des parties uniformément équicontinues de $\mathcal{U}(T)$.

Ce résultat peut encore s'énoncer autrement : en termes de structure initiale, de même qu'un espace complètement régulier est caractérisé par ses applications continues à valeurs réelles,

un espace uniforme séparé est caractérisé par les parties uniformément équicontinues de $\mathcal{U}(T)$.

On va exploiter ce résultat pour caractériser le complété de l'espace uniforme séparé T au moyen de formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathcal{U}(T)$. On renvoie à $[B_5]$ pour les définitions et résultats fondamentaux concernant les espaces vectoriels et algèbres compactologiques convexes. On cotient facilement :

3.1.3. Proposition.- Les parties uniformément équicontinues, simplement bornées, simplement fermées structurent $\mathcal{U}(T)$ en espace compactologique convexe.

De plus, si $\mathcal{U}(T)$ est une algèbre, c'est une algèbre compactologique convexe, autrement dit pour tous f et g dans $\mathcal{U}(T)$, l'application $f \mapsto f.g$ est un morphisme compactologique. En général $\mathcal{U}(T)$ n'est pas une algèbre mais est cependant muni d'une multiplication non partout définie, et possède un élément unité, l'application $t \mapsto 1$; on aurait pu essayer de généraliser à une telle structure les résultats de $[B_5]$ sur les algèbres compactologiques, en particulier ceux concernant les propriétés des caractères. On va voir que l'apport de la multiplication n'est pas essentiel. On dira néanmoins qu'une forme linéaire u sur $\mathcal{U}(T)$ est multiplicative si pour tous f et g appartenant à $\mathcal{U}(T)$ telles que $f.g \in \mathcal{U}(T)$, on a $u(f.g) = u(f)u(g)$.

3.1.4. Définition.- On dit qu'une forme linéaire u sur $\mathcal{U}(T)$ est modulaire si on a : $u(1) = 1$ et pour tout $f \in \mathcal{U}(T)$,
 $u(|f|) = |u(f)|$.

L'apport de la multiplication se mesure à la constatation suivante :

3.1.5. Théorème. - Une forme linéaire u sur $\mathcal{U}(T)$, non nulle, est multiplicative ssi elle est modulaire.

La condition nécessaire est conséquence de :

3.1.6. Lemme. - Soit u une forme linéaire multiplicative et non nulle sur $\mathcal{U}(T)$; on a :

- a) pour tout $f \in \mathcal{U}(T)$, $u(f) \in \overline{f(t)}$;
- b) pour tout $f \in \mathcal{U}(T)$, $u(|f|) = |u(f)|$.

On vérifie aisément que si u est multiplicative et non nulle, $u(1) = 1$. Soit alors $f \in \mathcal{U}(T)$; supposons qu'il existe $a > 0$, tel que, pour tout $t \in T$, $|f(t) - u(f)| \geq a$. En posant $g = f - u(f)$, on a $u(g) = 0$, et comme, pour tout $t \in T$, $g(t) \geq a$, $h = \frac{1}{g}$ est uniformément continue, ce qui contredit $u(g) = 0$. On déduit de a) que si $f \in \mathcal{U}(T)$, $f \geq 0$, on a nécessairement $u(f) \geq 0$, et la propriété b) s'obtient alors de la façon suivante : elle est vraie pour toute f bornée appartenant à $\mathcal{U}(T)$ et pour toute f inversible dans $\mathcal{U}(T)$ dont l'inverse est bornée; en posant $h = \frac{f}{1 + |f|}$, i.e. $f = h(1 + |f|)$, on voit que toute $f \in \mathcal{U}(T)$ est un produit de deux telles fonctions, d'où le résultat. La méthode ci-dessus est à rapprocher du fait que $\mathcal{C}(T)$ est l'anneau de fractions de $\mathcal{C}^*(T)$ pour la partie multiplicative de $\mathcal{C}^*(T)$ formée des fonctions inversibles dans $\mathcal{C}(T)$.

Un lemme analogue nous donne l'implication réciproque :

3.1.7. Lemme. - Soit u une forme linéaire modulaire sur $\mathcal{U}(T)$;

on a :

a) pour $f \in \mathcal{U}(T)$, $a \in \mathbb{R}$, tels que $f(t) \geq a$, quel que soit $t \in T$, $u(f) \geq a$;

b) pour $f \in \mathcal{U}(T)$, $u(f) \in \overline{f(T)}$;

c) pour tout $\varepsilon > 0$ et toute famille finie $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{U}(T)$, il existe $t \in T$, tel que

$$\sup_{i=1, \dots, n} |f_i(t) - u(f_i)| < \varepsilon .$$

Tout d'abord, $u(f) - a = u(f - a) = |u(f - a)| \geq 0$, ce qui montre a). Supposons maintenant $f \geq 0$ et $u(f) = 0$; d'après a) on a $\inf_{t \in T} f(t) = 0$, ce qui montre b) dans ce cas particulier. Pour montrer le cas général et aussi c), posons $g = \sum |f_i - u(f_i)|$; on peut appliquer à g le cas particulier précédent, car $u(g) = 0$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $t \in T$ tel que

$$g(t) = \sum |f_i(t) - u(f_i)| < \varepsilon ,$$

et, a fortiori, $|f_i(t) - u(f_i)| < \varepsilon$, pour tout $i = 1, \dots, n$.

La propriété c) exprime que toute forme linéaire modulaire est simplement adhérente dans $\mathbb{R}^{\mathcal{U}(T)}$ à l'ensemble des formes linéaires multiplicatives et non nulles, dont on sait par une démonstration classique qu'il est simplement fermé, ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.5.

On peut maintenant étudier les formes linéaires modulaires et compactologiques. Pour cela on reprend sous une forme plus générale le lemme 1 de [B.P] :

3.1.8. Lemme (Buchwalter).— Soit u une forme linéaire modulaire et compactologique de l'espace compactologique convexe $\mathcal{U}(T)$.

Soit H un ensemble uniformément équicontinu et simplement borné de fonctions $h \in \mathcal{U}(T)$, telles que $h \geq 0$ et $u(h) = 0$. Alors $f = \sup_{h \in H} h$ est uniformément continue et $u(f) = 0$.

La démonstration suit en tous points celle de $[B_6]$, 4.3.2, l'uniforme continuité de f étant conséquence de l'uniforme équi-continuité de H .

On en déduit :

3.1.9. Proposition.- Soit u une forme linéaire modulaire et compactologique de $\mathcal{U}(T)$; pour toute partie uniformément équicontinue de $\mathcal{U}(T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $t \in T$ tel que $|h(t) - u(h)| < \varepsilon$, pour tout $h \in H$.

On se ramène au lemme précédent en posant :

$$g_h = \inf(1, |h - u(h)|)$$

et on applique le lemme 3.1.7 à la fonction $f = \sup_{h \in H} g_h$.

Désignons maintenant par λT l'espace uniforme obtenu en munissant l'ensemble des formes linéaires modulaires et compactologiques de la structure uniforme de la $\mathcal{K}$ -convergence sur $\mathcal{U}(T)$. Il est aisé de vérifier que λT est un sous-espace uniforme fermé de l'e.l.c $\mathcal{U}(T)^*$ dual de l'e.c.c $\mathcal{U}(T)$ (cf. $[B_5]$, p.48, 3.1.2). C'est donc un espace uniforme complet. D'autre part T est canoniquement plongé dans λT par la transformation de Dirac, et la structure uniforme de T est, d'après le théorème 3.1.2, induite par celle de λT ; la proposition précédente montre alors que T est partout dense dans λT , ce qui assure :

3.1.10. Théorème.- Soit T un espace uniforme séparé; le complé-
té $\hat{T}$ de T s'identifie à l'ensemble λT des formes linéaires
modulaires et compactologiques de l'espace vectoriel compac-
tologique convexe $\mathcal{U}(T)$, lorsqu'on munit λT de la structure
uniforme de convergence sur les parties uniformément équi-
continues de $\mathcal{U}(T)$.

3.1.11. Remarques.- 1. La notion de forme linéaire modulaire a
été mise en avant par H.Buchwalter après la lecture d'une pre-
mière version de ce travail, où les démonstrations ci-dessus
étaient faites dans le cas particulier d'une algèbre $\mathcal{U}(T)$ (ce
qui suffira dans la suite); dans ce cas les formes modulaires
sont exactement les caractères unitaires (th. 3.1.5). On signa-
lait en remarque que le cas général pourrait être traité en fai-
sant usage de quasi-caractères; le formalisme proposé ici est
évidemment plus satisfaisant, car il "oublie" une multiplication
non partout définie, tout en étant rigoureusement équivalent au
traitement multiplicatif.

2. Les résultats ci-dessus sont établis à partir d'un es-
pace uniforme séparé; si T n'est pas séparé, une partie des rai-
sonnements précédents subsiste : l'image de T par la transforma-
tion de Dirac est partout dense dans λT . Pour le reste on est
amené à montrer directement, d'une part, que la transformation
de Dirac $T \rightarrow \lambda T$ est uniformément continue, et, d'autre part,
que si X est un espace uniforme séparé et complet, et si $f : T \rightarrow X$
est une application uniformément continue, on peut factoriser

f à travers λT de façon unique en une application uniformément continue $\lambda f : \lambda T \rightarrow X$. Ceci revient à montrer que l'application $g \mapsto u(g, f)$, où $g \in \mathcal{U}(X)$, est, pour tout $u \in \lambda T$, une forme linéaire modulaire et compactologique sur $\mathcal{U}(X) = X$, et que, en posant $\lambda f : u \mapsto (g \mapsto u(g, f))$, on obtient la factorisation cherchée. La vérification de ces résultats est élémentaire, pour ne pas dire triviale. Enfin l'espace topologique λT est séparé. En résumé, l'espace uniforme complet et séparé λT est toujours le complété séparé de T .

3. Si l'on considère l'algèbre $\mathcal{U}^*(T)$ des applications bornées uniformément continues à valeurs réelles, on peut la munir d'une compactologie d'algèbre au moyen de la famille $\mathcal{K}^*$ des parties H uniformément équi continues et uniformément bornées. La démonstration de 3.1.2 assure que la structure uniforme de T est également la structure de la $\mathcal{K}^*$ -convergence sur $\mathcal{U}^*(T)$. D'autre part le lemme 3.1.3 est encore valable et de plus $f = \sup_{h \in H} h$ est bornée. L'ensemble des caractères unitaires et compactologiques de l'algèbre $\mathcal{U}^*(T)$ est encore un espace uniforme complet pour la structure de la $\mathcal{K}^*$ -convergence. Comme il induit sur T la structure uniforme primitive on obtient un nouveau modèle du complété de T , la densité étant encore assurée par les mêmes lemmes. Ceci pourra être utile sous la forme suivante : tout caractère de $\mathcal{U}^*(T)$, continu sur les parties uniformément équi continues et uniformément bornées (avec la topologie de convergence simple sur ces parties) est prolongeable en une forme linéaire modu-

laire sur $\mathcal{U}(T)$, continue sur les parties uniformément équi-continues.

Applications : 1. La complétion universelle.

Soit T un espace complètement régulier muni de sa structure uniforme universelle (en tant qu'espace uniforme, T est un espace fin). On a alors $\mathcal{U}(T) = \mathcal{C}(T)$ d'une part, et d'autre part toute partie équicontinue de $\mathcal{C}(T)$ est uniformément équicontinue.

Le complété universel $\Theta_u T$ de T est ainsi l'espace des caractères compactologiques de l'algèbre compactologique convexe $\mathcal{C}(T)$ munie de la compactologie "équicontinue", ce qui était annoncé dans [B.P] et démontré dans [B₆].

On peut dire aussi que la structure uniforme universelle est la moins fine rendant uniformément équicontinues les parties équicontinues de $\mathcal{C}(T)$.

La remarque 3 ci-dessus permet de montrer que si $u \in \beta T$ est un caractère de l'algèbre de Banach $\mathcal{C}^*(T)$, et s'il est continu sur les parties équicontinues et uniformément bornées de $\mathcal{C}^*(T)$, il est prolongeable en un caractère (compactologique) de $\mathcal{C}(T)$; en particulier, pour tout $f \in \mathcal{C}^*(T)$ on aura $u(f) \in f(T)$.

2. La replétion.

On vient de voir qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les parties uniformément équicontinues de $\mathcal{U}(T)$ pour obtenir la structure uniforme de T . En particulier, si T est un espace complètement régulier, la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les $f \in \mathcal{C}(T)$ est bien définie par une

famille de parties uniformément équicontinues (a posteriori). Le complété de T est alors l'espace des caractères de l'algèbre $\mathcal{U}(T) = \mathcal{C}(T)$, compactologiques pour la compactologie discrète, autrement dit c'est l'ensemble des caractères algébriques, munis de la structure uniforme de convergence simple sur $\mathcal{C}(T)$. On désigne ce complété par $\nu_{\mathcal{U}}T$: c'est la replétion de T (avec sa structure uniforme). On en déduit que tout caractère algébrique de $\mathcal{C}(T)$ est continu sur une partie uniformément équicontinue de $\mathcal{C}(T)$ (munie de la topologie de convergence simple) pour cette structure uniforme de T , qu'on appellera désormais la ν -uniformité.

3.2. Précompactologies.

Ce paragraphe ne constitue pas une généralisation artificielle des compactologies, mais a pour but de donner une réponse à une question posée implicitement dans la thèse de Buchwalter. La dualité entre espaces compactologiques réguliers et $\ast$ -algèbres multiplicativement localement convexes commutatives et complètes est assurée par le théorème 2.3.2, p.44 de $[B_5]$. Par contre la dualité entre espaces topologiques complètement réguliers et algèbres compactologiques convexes est imparfaite puisque l'espace des caractères compactologiques de $\mathcal{C}(T)$ est la c -replétion de T . On va voir que les espaces compactologiques jouent en fait le rôle des espaces c -replets dans une catégorie plus vaste, et ainsi le parallélisme sera respecté. Par ailleurs il sera plus naturel de définir dans cette nouvelle catégorie les notions classiques de sous-objets et de sous-espaces.

3.2.1. Définition.— On appelle précompactologie sur un ensemble

$\mathcal{X}$ un recouvrement $\mathcal{P}$ de $\mathcal{X}$, héréditaire à gauche, filtrant à droite, satisfaisant aux axiomes :

(P₁) Toute partie $P \in \mathcal{P}$ est munie d'une structure uniforme précompacte séparée u_P .

(P₂) Si $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{P}$, $P \subset Q$, alors $u_P = u_Q|P$.

Un couple $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ sera appelé espace précompactologique.

Exemples : 1. Tout espace compactologique définit un espace précompactologique, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des parties P contenues dans les compacts $K \in \mathcal{K}$.

2. Tout espace uniforme séparé définit un espace précompactologique, au moyen de ses parties précompactes pour la structure uniforme induite.

3. $\mathbb{R}$ sera toujours muni de la précompactologie formée par ses parties relativement compactes.

On appelle morphisme précompactologique de $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ dans $(\mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ toute application $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}$, $f(P) \in \mathcal{Q}$, et de plus $f|P$ est uniformément continue.

La catégorie des espaces précompactologiques sera désignée par $\mathcal{CP}$. En particulier $\mathcal{CP}(\mathcal{X})$, ou $\mathcal{CP}(\mathcal{X}; \mathcal{P})$ s'il y a risque de confusion, désigne l'ensemble des morphismes précompactologiques de $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ un espace précompactologique; on appellera précompactologie induite sur une partie $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}$, le recouvrement de $\mathcal{X}'$ formé des $P \cap \mathcal{X}' = P'$, avec $u_{P'} = u_P|P'$; l'espace pré-

compactologique $(\mathfrak{X}', \mathcal{P}')$ est appelé sous-espace précompactologique de $(\mathfrak{X}, \mathcal{P})$. Si $(\mathfrak{X}, \mathcal{K})$ est compactologique, le sous-espace $(\mathfrak{X}', \mathcal{K}')$ est lui-même compactologique ssi $\mathfrak{X}'$ est un k -fermé de $\mathfrak{X}$ (cf. 2.2.1), ou encore ssi $\mathfrak{X}'$ est un fermé de $\underline{c}\mathfrak{X}$.

3.2.2. Proposition.- L'ensemble $\mathcal{CP}(\mathfrak{X})$ est une algèbre pour l'addition et la multiplication des applications numériques.

Ceci résulte immédiatement du fait que f/P est bornée.

On va maintenant attacher à un espace précompactologique un espace compactologique dont les propriétés seront déterminantes. Soit $P \in \mathcal{P}$, et $\hat{P}$ son complété; la famille $\hat{\mathcal{P}}$ des espaces compacts $\hat{P}$ est un système inductif filtrant (si P et Q sont deux éléments de $\mathcal{P}$, il existe $R \in \mathcal{P}$, tel que $P \cup Q \subset R$, et $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ s'identifient aux adhérences respectives de P et Q dans $\hat{R}$). La limite inductive (dans la catégorie des ensembles) du système $\hat{\mathcal{P}}$ est alors munie de la compactologie engendrée par les $\hat{P}$ (chaque $\hat{P}$ est en effet identifiable à une partie de cette limite inductive). On désigne par $\kappa(\mathfrak{X}, \mathcal{P})$ ou $(\kappa\mathfrak{X}, \hat{\mathcal{P}})$ ou $\kappa\mathfrak{X}$ l'espace compactologique ainsi construit; on a évidemment $\mathfrak{X} \subset \kappa\mathfrak{X}$. On ne peut affirmer en général que $\mathfrak{X}$ est un sous-espace précompactologique de $\kappa\mathfrak{X}$. Cependant $i : \mathfrak{X} \rightarrow \kappa\mathfrak{X}$ est un morphisme précompactologique.

3.2.3. Proposition.- Les algèbres $\mathcal{CP}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{CC}(\kappa\mathfrak{X})$ sont isomorphes.

L'opération de restriction définit un morphisme d'algèbres de $\mathcal{CC}(\kappa\mathfrak{X})$ dans $\mathcal{CP}(\mathfrak{X})$. Si f et g ont la même restriction à $\mathfrak{X}$,

on a $f|_P = g|_P$ pour tout $P \in \mathcal{P}$, et par prolongement $f|\hat{P} = g|\hat{P}$, d'où $f = g$ par limite inductive. D'autre part, tout $f \in \mathcal{CP}(X)$ se prolonge évidemment à XX en un morphisme compactologique.

On a de plus :

3.2.4. Proposition.- La topologie de convergence "précompacte" sur $\mathcal{CP}(X)$ est identique à la topologie de convergence "compacte" sur $\mathcal{CC}(XX)$.

La topologie de $\mathcal{CP}(X)$ est donnée par les semi-normes

$$\|f\|_P = \sup_{x \in P} |f(x)| = \|\hat{f}\|_{\hat{P}}.$$

(cf. $[B_6]$, prop. 1.2.1).

3.2.5. Définition.- On dit que l'espace précompactologique $(X, \mathcal{P})$ est complètement régulier si l'espace compactologique XX est régulier.

On s'aperçoit sans peine que lorsque X possède une base de compacts, l'espace XX n'est autre que X lui-même. Il n'y a pas d'inconvénients à confondre dans ce cas la notion de précompactologie avec celle de compactologie. En particulier tout espace compactologique régulier est complètement régulier.

Il ne semble pas que la simple régularité d'un espace précompactologique soit suffisante pour assurer la régularité de XX , car la séparation des points de X par les applications $f \in \mathcal{CP}(X)$ ne nous renseigne pas sur la séparation des points de XX par les "mêmes" applications. On obtient directement une forme plus précise (en ce sens qu'elle met en oeuvre des structures uniformes) du th. 1.1.3 de $[B_6]$.

3.2.6. Théorème. - Pour un espace précompactologique $(X, \mathcal{P})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) X est complètement régulier;
- b) il existe sur l'ensemble X une structure uniforme séparée u telle que $u|_P = u_P$;
- c) l'application canonique de restriction $\mathcal{UP}(X) \rightarrow \mathcal{U}(P)$ est surjective pour tout $P \in \mathcal{P}$.

Preuve : $a \Rightarrow b$: si X est complètement régulier, la structure uniforme initiale u sur X définie par les $\hat{f} \in \mathcal{UG}(X)$ induit sur X une structure uniforme séparée; comme $u|_{\hat{P}}$ est l'unique structure uniforme compatible avec la topologie du compact $\hat{P}$, $u|_P = u_P$.

$b \Rightarrow c$: soit u une structure uniforme séparée qui induit sur chaque P la structure u_P . Dans le complété $\hat{X}$ de X pour cette structure uniforme, les $\hat{P}$ s'identifient aux $\overline{\hat{P}}$. Si $g \in \mathcal{U}(P)$, g se prolonge à $\overline{\hat{P}}$ et par suite en une application continue $\bar{h} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$; la restriction $h = \bar{h}|_X$ prolonge g , et pour tout $P' \in \mathcal{P}$, $h|_{P'}$ est uniformément continue, car $\bar{h}|_{\overline{\hat{P}'}}$ est continue sur le compact $\overline{\hat{P}'}$.

$c \Rightarrow a$: désignons par i_P l'application canonique de $\hat{P}$ dans X ; soient x et x' deux éléments distincts de X ; il existe $P \in \mathcal{P}$, $y \in \hat{P}$, $y' \in \hat{P}$, $y \neq y'$, tels que $i_P(y) = x$ et $i_P(y') = x'$. Soit $g : \hat{P} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue qui sépare y et y' ; $g|_P$ est uniformément continue et se prolonge en $f \in \mathcal{UP}(X)$; l'application $\hat{f}$ est telle que $\hat{f} \circ i_P = g$ et sépare donc x et x' .

Il convient maintenant de souligner le parallélisme étroit que l'on obtient entre espaces topologiques et espaces précompactologiques ; par exemple :

3.2.7. Proposition.- Un espace précompactologique $(X, \mathcal{P})$ est régulier (i.e. séparé par $\mathcal{CP}(X)$) ssi il existe sur X une précompactologie complètement régulière $\mathcal{P}'$ moins fine que $\mathcal{P}$.

Par moins fine on entend que l'application identique $(X, \mathcal{P}) \rightarrow (X, \mathcal{P}')$ est un morphisme précompactologique. La condition est évidemment suffisante. Si $\mathcal{P}$ est régulière, considérons la limite inductive X' des compacts $\hat{P}$, pour $P \in \mathcal{P}$ dans la catégorie $\mathcal{CL}$. On sait (ch.2, §.6) qu'on l'obtient à partir de l'ensemble X ci-dessus en passant au quotient par la relation d'équivalence " $x \sim x' \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{CP}(X), \hat{f}(x) = \hat{f}(x')$ ". Ceci montre que X s'injecte dans cette limite X' . Si l'on munit X' de la structure uniforme la moins fine associée aux $f \in \mathcal{CP}(X)$, cette structure induit sur X une précompactologie complètement régulière moins fine que $\mathcal{P}$ (chaque partie P est en effet précompacte pour cette structure uniforme car les injections $P \rightarrow X'$ sont uniformément continues).

3.2.8. Théorème.- Le foncteur $\kappa : \mathcal{CP} \rightarrow \mathcal{CC}$ est adjoint à gauche au foncteur injection canonique de $\mathcal{CC}$ dans $\mathcal{CP}$.

Il suffit de remarquer que pour tout $g \in \mathcal{CP}(X, Y)$, où Y est un espace compactologique, les restrictions $g|_P$ se prolongent à $\hat{P}$; on termine alors par un argument de limite à droite.

Si l'on considère l'espace X' de la proposition 3.2.7, et la compactologie sur X' engendrée par les adhérences $\overline{P}$, on obtient

un espace compactologique régulier, noté $\kappa'X$, solution du problème universel relatif aux espaces compactologiques réguliers. On a $\kappa X = \kappa'X$ ssi X est complètement régulier.

Dans la suite on étudiera seulement les espaces précompactologiques complètement réguliers. Pour ceux-la :

3.2.9. Proposition.- Pour un espace précompactologique complètement régulier $(X, \mathcal{P})$, l'espace compactologique κX est l'espace des caractères continues de l'algèbre localement convexe $\mathcal{CP}(X)$.

3.3. Topologies et précompactologies.

A tout espace topologique complètement régulier T on associe une précompactologie complètement régulière $\mathcal{B}$ constituée par les parties précompactes de T pour la structure uniforme universelle de T . On sait que ces parties sont également les parties précompactes pour la $\mathcal{U}$ -uniformité; de plus les structures uniformes induites sont les mêmes. On appellera les éléments de $\mathcal{B}$ les bornés de T ; leur structure uniforme induite sera dite naturelle, et on notera κT l'espace précompactologique obtenu. Cette terminologie est justifiée par :

3.3.0. Proposition.- Les bornés de T sont exactement les parties $B \subset T$, telles que, pour tout $f \in \mathcal{C}(T)$, $f(B)$ soit borné dans $\mathbb{R}$.

A tout espace précompactologique complètement régulier on associe la topologie complètement régulière initiale définie par les $f \in \mathcal{C}(X)$ (et quelquefois la structure uniforme correspondante). On désigne par $p_R X$ l'espace topologique obtenu (qui est un

sous-espace de $\underline{c}_R(X, X)$.

Remarques : 1. Pour les compactologies on a :

$$\mathcal{CC}(\gamma T) \supset \mathcal{C}(T)$$

$$\mathcal{C}(\underline{c}_R X) = \mathcal{CC}(X).$$

2. Pour les précompactologies :

$$\mathcal{CP}(\pi T) \supset \mathcal{C}(T)$$

$$\mathcal{C}(p_R X) \supset \mathcal{CP}(X).$$

La dernière remarque montre, compte tenu de la précompactologie canonique de $\mathbb{R}$, qu'il n'y a pas adjonction entre p_R et π .

3.3.1. Définition.- On dit qu'une précompactologie complètement régulière est topologisante si $\mathcal{C}(p_R X) = \mathcal{CP}(X)$.

Dans ce cas chaque partie $P \in \mathcal{P}$ est un borné de $p_R X$ avec sa structure uniforme naturelle.

Exemples : 1. Toute compactologie est topologisante.

2. Soit T un espace pseudocompact, non compact, muni de sa structure uniforme universelle; la précompactologie réduite à $\{T\}$ est topologisante, sans être une compactologie.

3. Soit T un espace complètement régulier, non pseudocompact; une structure uniforme précompacte sur T fournit une précompactologie non topologisante.

3.3.2. Définition.- Une précompactologie $\mathcal{P}$ sur un espace topologique complètement régulier est compatible si tout $P \in \mathcal{P}$ est un borné avec sa structure uniforme naturelle.

La moins fine des précompactologies compatibles sur T est celle de πT .

Pour une précompactologie compatible $\mathcal{P}$ sur un espace topologique complètement régulier T , l'espace compactologique $\kappa(T; \mathcal{P})$ s'identifie à l'ensemble :

$$T_{\mathcal{P}} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \overline{P}^{\Theta}$$

où $\overline{P}^{\Theta}$ est l'adhérence de P dans ΘT , la compactologie ayant pour base les $\overline{P}^{\Theta}$ eux-mêmes. Si on munit $T_{\mathcal{P}}$ de la topologie induite par ΘT , on a la suite d'inclusions :

$$\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(T_{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{CP}(T; \mathcal{P}) = \mathcal{CC}(\kappa T) = \mathcal{C}(\underline{\subseteq}_R \kappa T) \subset \mathcal{C}(p_R(T; \mathcal{P}))$$

3.3.3. Théorème.- Soit T un espace topologique complètement régulier; pour une précompactologie $\mathcal{P}$ compatible sur T les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\mathcal{C}(T) = \mathcal{CP}(T; \mathcal{P})$;
- b) la compactologie de $\kappa(T; \mathcal{P})$ est couvrante sur $T_{\mathcal{P}}$;
- c) $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(p_R(T; \mathcal{P}))$.

La propriété a) est équivalente à $\mathcal{C}(T_{\mathcal{P}}) = \mathcal{C}(\underline{\subseteq}_R \kappa T)$ et par suite à $T_{\mathcal{P}} = \underline{\subseteq}_R \kappa T$; comme $c \Rightarrow a$ de façon triviale, et que les topologies de T et $p_R(T; \mathcal{P})$ sont induites respectivement par celles de $T_{\mathcal{P}}$ et $\underline{\subseteq}_R \kappa T$, le résultat est acquis.

3.3.4. Proposition.- S'il existe sur T une précompactologie compatible qui satisfait aux conditions de 3.3.3, il en est de même de la précompactologie de πT .

En effet, $\mathcal{C}(T) \subset \mathcal{CP}(\pi T) \subset \mathcal{CP}(T; \mathcal{P})$.

3.3.5. Définition.- Un espace topologique complètement régulier qui possède une précompactologie compatible $\mathcal{P}$ satisfaisant aux conditions équivalentes de 3.3.3 est appelé espace hypobornologique de type $\mathcal{P}$.

On dira simplement que T est hypobornologique si la précompactologie $\mathfrak{P}$ ne joue pas un rôle fondamental; ceci est justifié par la proposition précédente, et est à rapprocher des compactologies couvrantes qui définissent les k_R -espaces (cf.2.6.6). Un k_R -espace est donc un espace hypobornologique de type $\mathcal{K}$, pour une compactologie $\mathcal{K}$ couvrante.

On notera que contrairement aux compactologies la condition $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(p_R(T; \mathfrak{P}))$ (ou $T = p_R(T; \mathfrak{P})$) n'implique pas que la précompactologie $\mathfrak{P}$ soit compatible; par exemple, pour un espace topologique complètement régulier, muni de sa plus fine structure uniforme précompacte, on a $T = p_R T$, et si T n'est pas pseudo-compact, T n'est pas borné. En d'autres termes la notion de précompactologie couvrante qui devrait être associée à la condition $T = p_R T$ est moins intéressante que pour les compactologies. On obtient cependant une compatibilité faible, car la structure uniforme de $p_R(T; \mathfrak{P})$ est compatible avec la topologie de T , autrement dit les structures u_p sont induites par une structure uniforme compatible avec T , mais en général moins fine que la u -uniformité de T .

La généralisation du théorème de Warner (ch.2, §.6) nous donne maintenant une caractérisation des espaces hypobornologiques. Pour cela, si $\mathfrak{P}$ est une précompactologie compatible sur T , désignons par $\mathcal{C}_p(T)$ l'algèbre des fonctions continues munie de la topologie de convergence "précompacte".

3.3.6. Théorème.- Soit T un espace topologique complètement ré-

gulier; l'espace T est hypobornologique de type $\mathfrak{P}$ ssi il existe une précompactologie compatible $\mathfrak{P}$ satisfaisant à l'une des conditions équivalentes :

- a) $\mathcal{C}_p(T)$ est complète;
- b) $\mathcal{C}_p(T)$ est quasi-complète.

Pour une compactologie compatible on a :

$$\mathcal{C}_p(T) = \mathcal{C}_p(T, \mathfrak{P}).$$

Alors le théorème 3.3.3 associé au théorème de Warner donne le résultat.

On obtient ainsi comme cas particulier le théorème de Blanchard-Jourlin, et aussi le théorème de Warner.

3.4. Un théorème à tiroirs sur les parties équicontinues de $\mathcal{C}(T \times X)$.

Les paragraphes précédents ont servi à introduire sous une forme un peu nouvelle diverses notions déjà étudiées dans des séminaires (Lyon, Section d'Analyse fonctionnelle et Topologie, 1968-69, 1969-70) ou dans divers articles ($[B_6]$, $[B.J]$, $[P_4]$). On va maintenant utiliser ce matériel pour faire avancer la solution d'un problème précis, inspiré par les travaux de W.W.Comfort et S.Negrepontis.

Soient T et X deux espaces topologiques quelconques. Pour deux parties $A \subset T$, $B \subset X$, et une partie $H \subset \mathcal{C}(T \times X)$, on désigne par $H_A|B$ (resp. $H_B|A$) l'ensemble des applications :

$$x \mapsto h(a, x)$$

de B dans $\mathbb{R}$, pour $a \in A$ et $h \in H$ (resp. $t \mapsto h(t, b)$, de A dans $\mathbb{R}$, pour $b \in B$, $h \in H$).

On va relier l'équicontinuité d'une partie H à celle de l'une des deux parties $H_A|B \subset \mathcal{C}(B)$ ou $H_B|A \subset \mathcal{C}(A)$. Le théorème relatif, que l'on a en vue, regroupe un certain nombre de propriétés équivalentes, dont la plupart ont déjà fait l'objet de publications (au moins dans le cas global $A = T$ et $B = X$). L'intérêt du théorème ici présenté, en dehors de la généralisation au cas A et B quelconques, réside surtout dans le côté élémentaire des démonstrations. D'autre part l'accent est mis sur les propriétés d'équicontinuité, ce qui n'était pas le cas dans les articles déjà publiés.

Rappelons quelques définitions. On appelle noyau dans un espace topologique T , toute partie $Z \subset T$ pour laquelle il existe $f \in \mathcal{C}(T)$, et $a \in \mathbb{R}$, tels que $Z = \bar{f}^{-1}(a)$. On notera que Z est le noyau catégorique de la paire $T \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, où a désigne également la fonction constante égale à a (cf. [G.J] pour les propriétés des noyaux ou zero-sets). Remarquons enfin qu'on peut toujours supposer $a = 0$, et qu'on écrit $Z(f) = \bar{f}^{-1}(0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}(T)$.

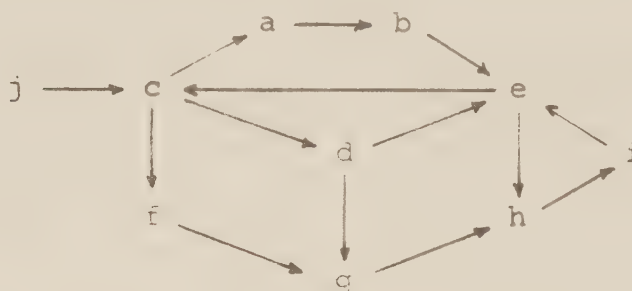
3.4.1. Définition.- On dit qu'une application $f : T \rightarrow X$ est

z-fermée si pour tout noyau $Z \subset T$, $f(Z)$ est fermé dans X . Plus généralement, si $A \subset T$, on dit que f est relativement z-fermée pour A , si pour tout noyau $Z \subset T$, $f(Z \cap A)$ est fermé dans $f(A)$.

Comme on écrira des propriétés relatives pour une partie A de T (ou B de X), pour tout espace Y on notera $\mathcal{R}(A, Y)$ l'ensemble des applications continues $g : A \rightarrow Y$ continûment prolongeables à T . C'est encore l'ensemble des restrictions à A des

3.4.2. Théorème. - Les neuf premières propriétés précédentes sont équivalentes et conséquence de la dernière. De plus, si $B \subset X$ est un noyau, les dix propriétés sont équivalentes.

La démonstration s'effectue suivant le schéma :



et $e \rightarrow j$ si B est un noyau.

Montrons d'abord le cas particulier :

$e \Rightarrow j$: si B est un noyau, soit $h \in \mathcal{C}(X)$ tel que $B = Z(h)$, et soit $Z(f)$ un noyau dans $T \times X$; soit $a \in A$, tel que $a \notin p_T(Z(f) \cap (A \times B))$; posons :

$$g(t, x) = \frac{|f(t, x)|}{|f(a, x)| + |f(t, x)| + |h(x)|}$$

qui est continue et bornée; on a : $g(a, x) = \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B$, et $g(t, x) = 0$ si $(t, x) \in Z(f)$; l'ensemble $\{g\}_B|_A$ est équicontinu dans $\mathcal{C}(A)$ d'après e); pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de a dans T , tel que pour tout $b \in B$ et tout $t \in U \cap A$, on a $|g(t, b) - g(a, b)| < \varepsilon$. En prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on voit que $(U \cap A) \times B$ ne rencontre pas $Z(f) \cap (A \times B)$, autrement dit, a n'est pas adhérent à $p_T(Z(f) \cap (A \times B))$.

On suppose maintenant que B est une partie quelconque de X .

$j \Rightarrow c$: soit $f \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$ où Y est un espace uniforme; soit d un écart sur Y uniformément continu sur $Y \times Y$; pour $a \in A$ et $\varepsilon > 0$,

l'ensemble Z des $(t, x) \in T \times X$, tels que $d(f(t, x), f(a, x)) \geq \varepsilon$ est un noyau de $T \times X$, et $a \notin p_T(Z \cap (A \times B))$ qui est fermé dans A ; il existe donc un voisinage U de a dans T tel que pour tout $b \in B$ et tout $t \in U \cap A$, $(t, x) \notin Z \cap (A \times B)$, i.e. $d(f(t, x), f(a, x)) < \varepsilon$, ce qui montre c).

c $\Rightarrow$ a : soit $Y = \mathbb{R}^H$, muni de la métrique définie par $\sup_{h \in H} |x_h - x'_h|$

(box-topology); soit $f : T \times X \rightarrow Y$ l'application dont les projections sont les $h \in H$; comme H est équicontinue, f est continue; d'après c) l'ensemble $\{f\}_B|_A$ est équicontinu dans $\mathcal{C}(A, Y)$; autrement dit pour tout $a \in A$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage U de a dans T , tel que pour tout $b \in B$ et tout $t \in U \cap A$,

$\sup_{h \in H} |h_b(t) - h_b(a)| < \varepsilon$, ce qui assure l'équicontinuité de $H_B|_A$.

h $\Rightarrow$ i : soient $g \in \mathcal{R}^*(A \times B)$ et $\hat{g} : a \mapsto g_a$; $\hat{g} \in \mathcal{C}(A, \mathcal{C}^*(B)) \simeq \mathcal{C}(A, \mathcal{C}^*(\beta B)) \simeq \mathcal{C}(A \times \beta B)$, les isomorphismes étant les isomorphismes fonctoriels du chapitre 1.

i $\Rightarrow$ e : soit $f \in \mathcal{C}^*(T \times X)$; on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f|_{A \times B}} & \mathbb{R} \\ & \searrow & \nearrow g \\ & A \times \beta B & \end{array}$$

Comme βB est compact, $p_A : A \times \beta B \rightarrow A$ est une application fermée, et d'après l'implication $j \Rightarrow c$, utilisée dans le cas global, $\{g\}_{\beta B}$ est équicontinu dans $\mathcal{C}(A)$; d'autre part si b et b' éléments de B ont même image dans βB , on a, pour tout $a \in A$, $f(a, b) = f(a, b')$ d'après le diagramme, et par suite l'ensemble

$\{f\}_B$ est équicontinu.

$e \Rightarrow c$: soit $\varepsilon > 0$ et soit d un écart borné, $d \in \mathcal{D}(Y)$. Pour tout $a \in A$, $g : (t, x) \mapsto d(f(a, x), f(t, x))$ est une application continue et bornée; l'ensemble $\{g\}_B|_A$ est équicontinu dans $\mathcal{C}(A)$; il existe donc U voisinage de a , tel que $t \in U \cap A$ implique $|g(t, b) - g(a, b)| < \varepsilon$, pour tout $b \in B$; or $g(a, b) = 0$, donc $d(f(a, x), f(t, x)) < \varepsilon$ quel que soit $(t, x) \in (U \cap A) \times B$.

Enfin les implications $a \Rightarrow b \Rightarrow e$, $c \Rightarrow d \Rightarrow e$ et $f \Rightarrow g \Rightarrow h$ sont des triviale. Les implications $c \Rightarrow f$, $d \Rightarrow g$ et $e \Rightarrow h$ sont conséquences immédiates de la proposition 1, §2 de $[B_2]$.

3.4.3. Remarque.- Dans le cas global où $A = T$ et $B = X$, les propriétés f , g et h s'écrivent respectivement :

$$f') \quad \mathcal{C}(T \times X, Y) = \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_U(X, Y));$$

$$g') \quad \mathcal{C}(T \times X) = \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_U(X));$$

$$h') \quad \mathcal{C}^*(T \times X) = \mathcal{C}^*(T, \mathcal{C}^*(X)).$$

L'égalité est ici conséquence du fait bien connu que la topologie de convergence uniforme sur $\mathcal{C}(X, Y)$ est admissible (cf. $[B_2]$, §.1, prop.9).

De plus, si $B = X$, B est un noyau (!) et les dix propriétés sont équivalentes.

3.4.4. Remarque.- Toujours dans le cas global, les équivalences $f' \Rightarrow g' \Rightarrow j$ sont dues à N.Noble ($[N_1]$) avec des considérations de "set-open" topologies; les équivalences $i \Rightarrow j \Rightarrow h'$ sont également données par N.Noble, avec la restriction "X complètement régulier" mais semblent dues pour une part au moins à Z.Frolik

([F]) (et quelques autres).

3.4.5. Remarque (encore).- Dans les cas global et $B = X$, l'équivalence $e \Rightarrow j$ fait l'objet des théorèmes 1 et 2 de $[N_4]$ sous la variante suivante : l'équicontinuité de $\{f\}_B|A$ est remplacée par la continuité de l'application $\sup_{b \in B} f(t, b)$.

Donnons maintenant quelques conséquences du théorème 3.4.2. Tout d'abord le théorème de Isbell (démontré par Hager ([H]) et Noble $[N_1]$ par la méthode ci-dessous) sur la structure uniforme universelle d'un produit d'espaces complètement réguliers.

3.4.6. Théorème (Isbell).- Soient T et X deux espaces uniformes fins; l'espace uniforme produit $T \times X$ est fin ssi p_T et p_X sont z -fermés.

Si $T \times X$ est fin, toute $f \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$, où Y est un espace uniforme, est uniformément continue, donc ($[B_2]$, §.2, prop.2) les ensembles $\{f\}_T$ et $\{f\}_X$ sont uniformément équicontinus et a fortiori équicontinus, ce qui donne la condition nécessaire.

Réciproquement, si p_T et p_X sont z -fermés, pour toute application $f \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$, les ensembles $\{f\}_T$ et $\{f\}_X$ sont équicontinus (3.4.2), donc uniformément équicontinus (§ 3.1, appl. 1) et le résultat s'obtient de nouveau par la proposition citée $[B_2]$.

Remarquons que cette dernière proposition n'est qu'un cas particulier de la :

3.4.7. Proposition.- Soient T et X deux espaces uniformes, et $H \subset \mathcal{C}(T \times X)$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) H_T et H_X sont uniformément équicontinus;

b) H est uniformément équicontinu pour la structure uniforme produit de $T \times X$.

Il est évident que sous l'hypothèse a), H est équicontinu; on vérifie par ailleurs que :

$$d_H((t, x), (t', x')) \leq d_{H_T}(x, x') + d_{H_X}(t, t')$$

et d_H est l'un des écarts définissant la structure uniforme produit, et a) $\Rightarrow$ b) d'après le lemme 3.1.1.

Réciproquement, si H est uniformément continu, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe d et d' , écarts définissant les structures uniformes de T et X , et $\alpha > 0$, tels que :

$$d(t, t') + d'(x, x') < \alpha \Rightarrow d_H((t, x), (t', x')) < \varepsilon.$$

En particulier, $d(t, t') < \alpha$ implique, pour tout $x \in X$, et tout

$$h \in H, \quad |h_x(t) - h_x(t')| < \varepsilon,$$

et H_X est uniformément équicontinu dans $\mathcal{C}(T)$.

Quand on passe des structures uniformes de deux espaces à la structure produit, on perd généralement beaucoup de propriétés. C'est déjà ce qu'exprime le théorème de Isbell, puisque pour supprimer cette perte, il faut des conditions très contraignantes (pour s'en convaincre on pourra consulter $[N_1]$, qui donne des conditions nécessaires pour les couples d'espaces (T, X) satisfaisant à p_T et p_X z -fermés). On peut encore mieux mesurer cette perte à la lumière du résultat suivant :

3.4.8. Proposition.- Soient T et X deux espaces uniformes séparés; si la structure uniforme produit sur $T \times X$ est plus fine que la β -uniformité de $T \times X$, les projections p_T et p_X sont z -fermées.

En effet, toute $f \in \mathcal{C}^*(T \times X)$ est alors uniformément continue, et la proposition résulte de la propriété e) de 3.4.2 (forme globale).

Enfin notons qu'en termes de complétion, le théorème de Isbell s'écrit sous la forme suivante :

3.4.9. Théorème.- Soient T et X deux espaces complètement réguliers; les deux espaces uniformes $\Theta_u(T \times X)$ et $\Theta_u T \times \Theta_u X$ sont (naturellement) isomorphes ssi p_T et p_X sont z -fermés.

Cela résulte immédiatement du fait que $\Theta_u T \times \Theta_u X$ induit sur $T \times X$ la structure uniforme produit des structures universelles.

Ce théorème règle donc complètement le sort du foncteur Θ_u en ce qui concerne la commutation possible au produit direct.

3.5. Le foncteur Θ de c -replétion.

Nous allons donner maintenant des conditions suffisantes portant sur les espaces complètement réguliers T et X pour que l'on ait :

$$\Theta(T \times X) = \Theta T \times \Theta X$$

(l'égalité est bien entendu un homéomorphisme). C'est évidemment une exigence moins forte que celle exprimée dans 3.4.9 (qui donne d'ailleurs une première condition suffisante). Pour l'instant nous ne pouvons donner de conditions nécessaires et suffisantes que pour certains types d'espaces. Elles seront d'ailleurs liées à la propriété :

3.5.1. Proposition.- Si $\Theta(T \times X) = \Theta T \times \Theta X$, pour tous bornés $A \subset T$ et $B \subset X$, le produit $A \times B$ est borné dans $T \times X$.

En effet, $\overline{A \times B}^\Theta$ est l'adhérence de $A \times B$ dans $\Theta(T \times X)$.

Pour utiliser commodément le théorème 3.4.2, on dira que le couple $((T, A), (X, B))$ satisfait à la propriété (F.N.H) (Frolik-Noble-Hager). Si B n'est pas un noyau on ne supposera pas en général que p_T est relativement z -fermée sur $A \times B$. On a encore besoin d'un lemme technique, dont les hypothèses seront aisément vérifiables pour certain type d'espaces.

3.5.2. Lemme.— Soient T un espace complètement régulier, X un espace topologique, $H \subset \mathcal{C}(T \times X)$ une partie équicontinue. Si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V tel que H_V soit équicontinu dans $\mathcal{C}(T)$, alors H se prolonge en une partie équicontinue $H' \subset \mathcal{C}(\Theta T \times X)$.

Soit $h \in H$; pour tout couple $(u, x) \in \Theta T \times X$, on pose $h'(u, x) = u(h_x)$. Soit $(u_0, x_0) \in \Theta T \times X$, et soit V_0 un voisinage de x_0 , tel que H_{V_0} soit équicontinu. Il existe donc un $t_0 \in T$, tel que $u_0(h_x) = h(t_0, x)$ quels que soient $x \in V_0$ et $h \in H$ ([B₆], 4.3.3); soit $W = U \times V_1$ un voisinage de (t_0, x_0) dans $T \times X$ tel que

$$|h(t, x) - h(t_0, x_0)| < \varepsilon$$

quels que soient $(t, x) \in W$ et $h \in H$. Posons $V = V_0 \cap V_1$, et désignons par U^Θ le voisinage de u_0 dans ΘT défini par la partie équicontinue H_V et $\varepsilon > 0$. On a pour tout $(u, x) \in U^\Theta \times V$:

$$\begin{aligned} |h'(u, x) - h'(u_0, x_0)| &\leq |h'(u, x) - h'(u_0, x)| + |h(t_0, x) - h(t_0, x_0)| \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

quel que soit $h' \in H'$, ce qui montre le lemme.

3.5.3. Théorème.— Soient T un espace complètement régulier et

X un espace topologique. Si pour tout point $x \in X$ il existe un voisinage V tel que $(T, (X, V))$ satisfasse à (F.N.H), les algèbres $\mathcal{C}(T \times X)$ et $\mathcal{C}(\Theta T \times X)$ sont compactologiquement isomorphes.

La condition imposée à X permet d'appliquer le lemme pour toute partie équicontinue H de $\mathcal{C}(T \times X)$, avec le même voisinage V , ce qui est presque du luxe. Entre autres, si $H = \{f\}$, la densité de $T \times X$ dans $\Theta T \times X$ et le lemme montrent que $\mathcal{C}(T \times X)$ et $\mathcal{C}(\Theta T \times X)$ sont isomorphes (algébriquement). Si H est simplement bornée, la partie H' qui lui correspond est simplement bornée; reste à montrer que $h \mapsto h'$ est simplement continue de H sur H' . Soit U un voisinage élémentaire de h' dans $\mathcal{C}(\Theta T \times X)$ muni de la topologie de convergence simple; U est l'ensemble des $g \in \mathcal{C}(\Theta T \times X)$ telles que, pour un couple (u, x) et un $\varepsilon > 0$, on ait :

$$|g(u, x) - h'(u, x)| = |g(u, x) - u(h_x)| < \varepsilon.$$

Toujours d'après le lemme 4.3.3 de $[B_6]$, il existe $t \in T$ tel que $u(k_x) = k(t, x)$, quel que soit $k \in H$; soit $V(t, x, \varepsilon)$ le voisinage élémentaire de $h \in \mathcal{C}(T \times X)$ défini par (t, x) et ε ; si $k \in H \cap V$, on a $|k(t, x) - h(t, x)| < \varepsilon$ et par suite $|k'(u, x) - h'(u, x)| < \varepsilon$, i.e. $k' \in U$. Comme par ailleurs, l'application de restriction de $\mathcal{C}(\Theta T \times X)$ dans $\mathcal{C}(T \times X)$ est évidemment compactologique, le résultat est acquis.

Ce théorème nous donne immédiatement quelques résultats moins sophistiqués.

3.5.4. Théorème.- Soit X un espace localement compact (séparé)

complet pour une structure uniforme compatible (i.e. c-replet)
 Pour tout espace complètement régulier T , on a

$$\Theta(T \times X) = \Theta T \times X.$$

En effet, $\mathcal{C}(T \times X)$ et $\mathcal{C}(\Theta T \times X)$ sont compactologiquement isomorphes et comme $\Theta T \times X$ est c-replet, le résultat est conséquence de ([B₅], 4.3.7).

D'autre part on obtient la condition suffisante du théorème de Glicksberg :

3.5.5. Théorème (Glicksberg).- Soient T et X deux espaces pseudocompacts; si p_T (ou p_X) est z -fermé, on a :

$$\beta(T \times X) = \beta T \times \beta X.$$

Une double application de 3.5.3 donne

$$\Theta(T \times X) = \beta T \times \beta X$$

et par suite la structure uniforme universelle sur $T \times X$ est précompacte, d'où le théorème.

On notera que la proposition 3.4.8 donne une réciproque partielle, car si $\beta(T \times X) = \beta T \times \beta X$, p_T et p_X sont z -fermés. L'autre partie de la réciproque peut s'obtenir simplement par la méthode de Tamano ([T]).

En vue d'obtenir des conditions suffisantes moins restrictives sur l'un des espaces T ou X , nous allons étudier les parties bornées d'un produit. Tous les espaces sont complètement réguliers. On aura besoin du lemme classique suivant :

3.5.6. Lemme.- Une partie A de T est bornée ssi pour tout ensemble infini d'ouverts non vides U_i de T , localement fini,

on a $U_i \cap A = \emptyset$ sauf peut-être pour un nombre fini des U_i .

On peut supposer l'ensemble d'ouverts dénombrable, et l'écrire sous forme d'une suite injective $n \mapsto U_n$; supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap U_n \neq \emptyset$, et soit $x_n \in A \cap U_n$; les x_n forment une suite prenant une infinité de valeurs, sinon l'ensemble $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne serait même pas ponctuellement fini; on peut donc encore supposer la suite $n \mapsto x_n$ injective; soit alors $f_n : T \rightarrow [0, 1]$ telle que $f_n(x_n) = 1$ et $f_n(x) = 0$ si $x \notin U_n$; la fonction $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} n f_n$ est continue sur T et non bornée sur A . La réciproque est immédiate ($[I_1]$).

On obtient ensuite la version relative du théorème global de Z.Frolik ($[F]$) :

3.5.7. Théorème (Frolik).— Soient $A \subset T$ et $B \subset X$ deux parties bornées de deux espaces complètement réguliers T et X ; si $A \times B$ est borné dans $T \times X$, pour toute partie équicontinue $H \subset \mathcal{C}(T \times X)$ l'ensemble $H_B|A$ (resp. $H_A|B$) est équicontinu dans $\mathcal{C}(A)$ (resp. $\mathcal{C}(B)$).

On modifie à peine la démonstration de Frolik. Dire que $H_B|A$ n'est pas équicontinu, c'est dire qu'il existe un $t \in A$ et un $\varepsilon > 0$, tels que pour tout voisinage (ouvert) U_0 de t dans T , il existe $h_1 \in H$, $x_1 \in B$ et $t_1 \in A \cap U_0$, avec :

$$|h_1(t_1, x_1) - h_1(t, x_1)| \geq 4\varepsilon.$$

On construit alors la suite $((h_n, t_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H \times A \times B$, et les suites $W_n = U_n \times V_n$ et $W'_n = U'_n \times V_n$ de voisinages (dans $T \times X$) de (t, x_n) et (t_n, x_n) telles que :

- 1) $|h_n(t', x') - h_n(t_n, x_n)| < \varepsilon$ pour tout $(t', x') \in W'_n$
- 2) $|h_n(t', x') - h_n(t, x_n)| < \varepsilon$ pour tout $(t', x') \in W_n$
- 3) $U'_n \subset U_{n-1}$
- 4) $|h_n(t_n, x_n) - h_n(t, x_n)| \geq 4\varepsilon$.

On vérifie que la suite $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est injective et que $W'_n \cap (A \times B) \neq \emptyset$; d'après 3.5.6 il existe $(t_0, x_0) \in T \times X$, tel que tout voisinage $W = U \times V$ de (t_0, x_0) rencontre une infinité de W'_n ; on montre alors que $W \cap W'_n \neq \emptyset$ implique $W \cap W_n \neq \emptyset$; soit W tel que, pour tout $h \in H$

$$|h(t', x') - h(t_0, x_0)| < \varepsilon$$

quel que soit $(t', x') \in W$. Il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|h_n(t_n, x_n) - h_n(t_0, x_0)| < 2\varepsilon$$

$$|h_n(t, x_n) - h_n(t_0, x_0)| < 2\varepsilon$$

d'où
$$|h_n(t_n, x_n) - h_n(t, x_n)| < 4\varepsilon$$

ce qui contredit 4).

Contrairement à l'affirmation de N.Noble dans $[N_2]$, th.2.5, il ne résulte pas de ce théorème que p_T et p_X sont relativement z -fermés sur $A \times B$. Un contre-exemple élémentaire est donné dans $\mathbb{R}^2$ par : $A = [0, 1]$, $B = [0, 1[$, et Z est le noyau de $(x, y) \mapsto x + y - \frac{3}{2}$; $p_1(A \times B \cap Z) =]\frac{1}{2}, 1]$ qui n'est pas fermé dans $[0, 1]$. On peut cependant affirmer que si B est un noyau borné et $A \times B$ est borné dans $T \times X$, p_T est relativement z -fermé sur $A \times B$. Plus généralement, appelons hyperbornée toute partie B d'un espace complètement régulier X , telle que pour toute application continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur B , il existe un $\lambda > 0$ tel

que $|f(x)| \geq \lambda$ sur B (cf. $[I_2]$). On déduit aisément de 3.5.6 qu'un hyperborné est borné; la réciproque est fausse comme le montre les ouverts relativement compacts de $\mathbb{R}$. Cependant un noyau borné est hyperborné.

3.5.8. Proposition.- Soient A et B deux bornés de T et X ; si $A \times B$ est borné dans $T \times X$ et B est hyperborné, alors p_T est relativement z -fermé sur $A \times B$.

En effet, soit $Z(f)$ un noyau dans $T \times X$; pour tout $a \in A$, $a \notin p_T(Z(f) \cap (A \times B))$, l'application $x \mapsto f(a, x)$ ne s'annule pas sur B ; il existe $\lambda > 0$, tel que $|f(a, x)| \geq \lambda$ sur B ; soit X_λ l'ensemble des $x \in X$ tels que $|f(a, x)| \geq \lambda$; X_λ est un noyau $Z(h)$ de X et $B \subset Z(h)$. Alors :

$$g(t, x) = \frac{|f(t, x)|}{|f(a, x)| + |f(t, x)| + |h(x)|}$$

est continue et bornée sur $T \times X$ et la démonstration s'achève comme en 3.4.2 ($e \Rightarrow j$) moyennant le théorème de Frolik.

Soit B une partie bornée de X ; pour toute application continue $f : T \times X \rightarrow Y$, où Y est un espace uniforme, et pour tout $t \in T$, l'application $f_t|_B \in \mathcal{C}(B, Y)$ est en fait uniformément continue pour la structure uniforme naturelle de B . Par suite :

3.5.9. Proposition.- Soient $A \subset T$, B un borné de X et Y un espace uniforme complet; si $((T, A), X, B)$ vérifie (F.N.H), pour tout $f \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$ la restriction $f|_{A \times B}$ se prolonge à $A \times \overline{B}^\Theta$.

En effet, l'application $t \mapsto f_t|_B$ ($t \in A$) appartient à $\mathcal{C}(A, \mathcal{U}_u(B, Y))$ d'après 3.4.2. Or $\overline{B}^\Theta$ étant compact, donc convenable, on a les isomorphismes fonctoriels classiques :

$$\mathcal{C}(A, \mathcal{U}_u(B, Y)) \simeq \mathcal{C}(A, \mathcal{C}(\overline{B}^\Theta, Y)) \simeq \mathcal{C}(A \times \overline{B}^\Theta, Y).$$

On obtient ainsi une injection naturelle de $\mathcal{R}(A \times B, Y)$ dans $\mathcal{C}(A \times \overline{B}^\Theta, Y)$, l'image d'un élément $g \in \mathcal{R}(A \times B, Y)$ étant le prolongement cherché.

On peut maintenant donner, concernant le problème fondamental, la condition suffisante (et nécessaire) la meilleure, que j'ai pu obtenir par cette voie.

3.5.10. Théorème.— Soient T un espace hypobornologique et X un

espace complètement régulier, tel que ΘX soit localement compact; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) le produit de deux bornés $A \subset T$, $B \subset X$ est borné dans $T \times X$;
- b) $\Theta(T \times X) = \Theta T \times \Theta X$.

L'implication $b \Rightarrow a$ est générale (3.5.1). Pour la réciproque on utilise le problème universel de la c -replétion. En effet, $\Theta T \times \Theta X$ est un espace c -replet dans lequel $T \times X$ est partout dense. Il suffit donc de montrer que pour tout espace c -replet Y et toute application continue $f : T \times X \rightarrow Y$, il existe un prolongement à $\Theta T \times \Theta X$.

Soient $A \subset T$ et $B \subset X$ deux bornés; d'après 3.5.7 et 3.5.9 la restriction $f|_{A \times B}$ de f se prolonge en une application continue $f_B^A : \overline{A}^\Theta \times B \rightarrow Y$; la famille $(f_B^A)_{B \in \mathcal{B}(X)}$ forme un système inductif; comme ΘX est localement compact, X est localement borné ($[C_2]$), donc limite inductive (dans $\mathcal{C}\mathcal{X}$) de ses parties bornées; comme $\overline{A}^\Theta$ est compact (séparé) donc localement compact, ce système détermine une application continue $f^A : \overline{A}^\Theta \times X \rightarrow Y$, qui d'après

3.5.4 se prolonge continûment en $\bar{f}^A : \bar{A}^\Theta \times \Theta X \rightarrow Y$. L'espace ΘX étant localement compact, il correspond à $\bar{f}^A$ une application continue $\hat{f}^A : \bar{A}^\Theta \rightarrow \mathcal{C}_c(\Theta X, Y)$ et par restriction à A une application uniformément continue pour la structure uniforme naturelle du borné $A : \hat{f}^A : A \rightarrow \mathcal{C}_c(\Theta X, Y)$. Si on répète cette construction pour tous les bornés A de T , on obtient un système inductif $(\hat{f}^A)_{A \in \mathcal{B}(T)}$ d'applications uniformément continues sur les espaces uniformes A . Comme T est hypobornologique, ce système définit une application continue $\hat{f} : T \rightarrow \mathcal{C}_c(\Theta X, Y)$ et, en utilisant de nouveau le fait que ΘX est localement compact une application continue $f : T \times \Theta X \rightarrow Y$. Une dernière application de 3.5.4 fournit enfin le prolongement cherché de f à $\Theta T \times \Theta X$. (On peut également utiliser le fait que $\mathcal{C}_c(\Theta X, Y)$ est complet pour prolonger $\hat{f}$ à ΘT , puis revenir au produit $\Theta T \times \Theta X$ car ΘX est convenable).

La vérification du fait que les systèmes $(f_B^A)_{B \in \mathcal{B}(X)}$ et $(\hat{f}^A)_{A \in \mathcal{B}(T)}$ sont inductifs est purement technique et s'opère aisément au moyen de diagrammes.

La condition a) sur les bornés ne semble pas facile à vérifier dans la pratique. Aussi en utilisant des espaces déjà étudiés par Z.Frolik, on peut donner une version plus faible, mais plus sympathique de 3.5.10. Dans [F] Z.Frolik considère les espaces pseudocompacts dont le produit par un espace pseudocompact arbitraire est encore pseudocompact; de même dans [N₄], N.Noble considère les parties bornées A d'un espace complètement régulier T , telles que pour tout espace pseudocompact X , $A \times X$ soit borné

dans $T \times X$, et montre qu'alors pour tout espace complètement régulier X et tout borné B de X , $A \times B$ est borné dans $T \times X$. Soit $\mathcal{P}_F$ (resp. $\mathcal{P}_N$) la précompactologie compatible définie par les parties pseudocompactes de T caractérisées par Frolik (classe $\mathcal{P}$ de $[F]$) (resp. par les parties bornées de T satisfaisant à la condition de Noble); si ces précompactologies font de T un espace hypobornologique (définition 3.3.5), le théorème 3.5.10 peut s'appliquer sans mentionner la condition a) ;

3.5.11. Théorème.— Soit T un espace hypobornologique de type

$\mathcal{P}_F$ ou de type $\mathcal{P}_N$, et soit X un espace complètement régulier tel que ΘX soit localement compact; alors

$$\Theta(T \times X) = \Theta T \times \Theta X.$$

La démonstration est la même que celle de 3.5.10.

Parmi ces espaces hypobornologiques particuliers figurent les k_R -espaces.

Les résultats précédents sont pour une part à l'origine de l'étude un peu détaillée des espaces hypobornologiques données au §.3. Dans ses travaux N.Noble définit ce qu'on pourrait appeler les espaces bornologiques ou b_R -espaces, comme étant limitée à droite dans la catégorie $\mathcal{EX}$ de leurs parties bornées. Cette notion semble moins naturelle que celle d'espace hypobornologique car elle abandonne la structure uniforme liée à un borné. D'autre part si une fonction $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle est du même coup uniformément continue sur les bornés; la condition pour un espace T d'être bornologique impose aux fonctions $f: T \rightarrow \mathbb{R}$,

continues sur les bornés d'être a posteriori uniformément continues sur ces mêmes bornés. Parmi les propriétés des espaces bornologiques cités par Noble, il convient de rectifier ainsi le théorème 3 de $[N_4]$:

3.5.12. Proposition (Noble).- Soit T un espace bornologique et

soit X un espace complètement régulier; la projection $p_T : T \times X \rightarrow T$ est z -fermée ssi l'une des conditions suivantes est réalisée :

- a) T est discret;
- b) pour tout borné $A \subset T$, non discret, $A \times X$ est borné dans $T \times X$.

La condition non discret doit être introduite, car on ne peut montrer la nécessité de b) pour les bornés discrets; l'affirmation selon laquelle toute partie discrète bornée est finie est erronée (cf. l'exemple classique de N plongé dans le plan de Tychonoff $[G.J]$).

En résumé on a l'égalité topologique $\Theta(T \times X) = \Theta T \times \Theta X$ dans les trois cas suivants :

1. La structure universelle du produit est le produit des structures universelles de chaque facteur. Les couples d'espaces ayant cette propriété sont étudiés dans $[I_4]$ et $[N_1]$.

2. L'un des espaces, par exemple X , est c -replet, et chacun de ses points possède un voisinage V tel que $(T, (X, V))$ vérifie (F.N.H). En particulier, si X est localement compact, ceci a lieu pour tout espace complètement régulier T .

3. La c -replétion de X est localement compacte, T est hypobornologique et le produit de deux bornés est borné.

Dans le cas 3, le gain réalisé sur l'espace X est compensé par une condition de recollement : T est hypobornologique.

La condition ΘX est localement compact, qui semble fondamentale, peut se rattacher à une condition plus générale sur les précompactologies. Elle a été démontrée pour la première fois par Comfort dans un contexte plus restreint ($[C_2]$), et caractérise en même temps les espaces complètement réguliers localement bornés. Disons, avec Comfort, qu'un recouvrement $\mathcal{R}$ de T , filtrant à droite, vérifie la condition de Gould ($[G_1]$) si pour tout $A \in \mathcal{R}$ il existe $B \in \mathcal{R}$ et une application continue $f : T \rightarrow [0,1]$ tels que $f|_A = 0$ et $f|_{T-B} = 1$. On a alors la généralisation suivante du théorème 4.2 de $[C_2]$:

3.5.13. Théorème.- Pour un espace complètement régulier T les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) il existe sur T une précompactologie compatible $\mathcal{P}$ qui vérifie la condition de Gould;
- b) il existe sur T une précompactologie compatible $\mathcal{P}$ telle que l'espace topologique $T_{\mathcal{P}}$ soit localement compact;
- c) T est localement borné.

L'implication $a \Rightarrow b$ résulte immédiatement du lemme :

3.5.14. Lemme.- Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}$, $A \subset B$, tels qu'il existe $f : T \rightarrow [0,1]$ avec $f|_A = 0$ et $f|_{T-B} = 1$. Alors $\overline{A}^{\Theta}$ possède un voisinage compact dans T .

Soit $g = f^\beta$ et $K = \bar{g}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$; K est un voisinage compact dans βT de $\bar{A}^\theta$; si $z \notin \bar{B}^\theta = \bar{B}^\beta$, on a $z \in \overline{T-B}^\beta$, donc $g(z) = 1$, et par suite $K \subset \bar{B}^\theta \subset T_\beta$.

L'implication $b \Rightarrow c$ est bien connue.

Enfin si T est localement borné, soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties bornées de T qui vérifient la propriété suivante :

" $A \in \mathcal{P} \iff$ il existe $B \in \mathcal{B}(T)$ et $f : T \rightarrow [0, 1]$, continue, tels que $f|_A = 0$ et $f|_{T-B} = 1$ ".

Tout d'abord $\mathcal{P}$ est un recouvrement de T car T est localement borné et complètement régulier; si A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{P}$ il est aisé de voir que $f_1 \cdot f_2$ sépare $A_1 \cup A_2$ et $T - (B_1 \cup B_2)$. Enfin si $A \in \mathcal{P}$, soit $B' = \bar{f}^{-1}([0, \frac{1}{2}])$; $B' \subset B$, et en tronquant l'application f on sépare A de $T-B'$ et B' de $T-B$; comme B' est borné, $\mathcal{P}$ vérifie la condition de Gould, et d'autre part engendre une précompactologie compatible, ce qui achève la démonstration de 3.5.13.

En particulier si $\mathcal{B}(T)$ vérifie la condition de Gould, l'espace $T'' = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \bar{B}^\theta$ (cf. $[B_6]$) est localement compact.

Ceci permet de caractériser les espaces dont la replétion ou la c -replétion est localement compacte :

3.5.15. Proposition.- Soit T un espace complètement régulier;

l'espace θT (resp. νT) est localement compact ssi $T'' = \theta T$ (resp. $T'' = \nu T$) et T'' est localement compact.

La condition est trivialement suffisante. Réciproquement, si θT (resp. νT) est localement compact, soient $u \in \theta T$ (resp. νT) et K un voisinage compact de u dans θT (resp. νT); alors $K \cap T$

est un borné de T et $u \in \overline{K \cap T}^\theta$, donc $T'' = \theta T$ (resp. $T'' = \nu T$).

Bien entendu 3.5.15 doit se lire en liaison avec 3.5.13.

On en déduit le corollaire intéressant suivant :

3.5.16. Corollaire.- Si νT est localement compact, alors $\theta T = \nu T$.

En effet, $T'' \subset \theta T \subset \nu T$.

3.6. Les foncteurs de replétion.

On sait que les problèmes de replétion font intervenir des conditions cardinales de "modération". On dira, suivant en cela G.Choquet, qu'un cardinal est modéré s'il n'est pas mesurable. Un ensemble dont le cardinal est modéré (resp. mesurable) sera dit modéré (resp. mesurable). Le résultat qui est à l'origine des recherches du paragraphe précédent est du à Comfort ($[C_2]$) et peut se démontrer simplement par un procédé catégorique :

3.6.1. Théorème (Comfort).- Soit X un espace localement compact,

replet et modéré; pour tout espace complètement régulier

T on a

$$\nu(T \times X) = \nu T \times X$$

On reprend la démonstration donnée dans $[P_3]$. On remarque d'abord que si X est modéré il en est de même de $\mathcal{C}(X)$. Comme X est localement compact, $\mathcal{C}_c(X)$ est complet et donc replet d'après le théorème de Shirota. D'autre part l'isomorphisme d'algèbres $\mathcal{C}(T \times X) = \mathcal{C}(T, \mathcal{C}_c(X))$ fournit, par le problème universel de replétion, $\mathcal{C}(T \times X) = \mathcal{C}(\nu T, \mathcal{C}_c(X)) = \mathcal{C}(\nu T \times X)$. Comme $\nu T \times X$ est replet le résultat est démontré.

On notera que 3.6.1 n'est pas un corollaire de 3.5.4 sauf

pour les espaces T pour lesquels $\Theta T = \nu T$, espaces que l'on appellera pseudoreplets dans la suite. On sait qu'il en est ainsi si νT est localement compact (3.5.16), ou si l'espace T est modéré ($[B_5]$, 4.3.14, p.63); plus généralement :

3.6.2. Proposition (Shirota).- Soit T un espace complètement

régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) T est pseudoreplet;

b) Pour tout écart d continu sur $T \times T$, toute partie d -discrète de T est modérée.

On en trouvera la démonstration dans $[B_7]$.

Si l'on fait passer, dans 3.6.1, la condition de modération, ou la condition plus générale de 3.6.2, sur l'espace T , on obtient d'après 3.5.4 :

3.6.3. Théorème.- Soit X un espace localement compact, replet;

pour tout espace complètement régulier T pseudoreplet, on a

$$\nu(T \times X) = \nu T \times X.$$

En effet, $\Theta(T \times X) = \Theta T \times X$, et comme $\Theta T = \nu T$, l'espace $\Theta(T \times X)$ est replet, donc égal à $\nu(T \times X)$.

On peut enfin appliquer le théorème général 3.5.10 :

3.6.4. Théorème.- Soient T un espace hypobornologique et

pseudo-replet et X un espace complètement régulier, tel que νX soit localement compact; les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) le produit de deux bornés $A \subset T$, $B \subset X$ est borné dans $T \times X$;

b) $\nu(T \times X) = \nu T \times \nu X$.

L'implication $a \Rightarrow b$ se déduit de 3.5.10 par le même argument que celui de 3.6.3. L'autre implication est générale car pour tout borné A de T , $\overline{A}^\Theta = \overline{A}^\nu$.

Par rapport au théorème 4.5 de $[C_2]$, l'abandon de la condition de modération sur X oblige à renforcer en général les conditions sur T ; il ne semble pas que les deux théorèmes soient réductibles l'un à l'autre (sauf sous l'hypothèse de la non existence de cardinaux mesurables) : en effet, un espace discret mesurable T vérifie la condition de Comfort (ses compacts sont modérés !) mais il n'est pas pseudoreplet; par ailleurs un espace pseudocompact mesurable a sa replétion localement compacte sans que ses parties pseudocompactes soient modérées.

Examinons maintenant le peu qu'on sait sur le foncteur ν_u . On dira qu'un espace complètement régulier T est uniformément pseudoreplet si $\Theta_u T = \nu_u T$. Il y a peu d'espoir pour l'instant d'obtenir des critères maniables pour l'uniforme pseudoreplétude, d'autant que pour la pseudoreplétude, on ne connaît, en dehors de 3.6.2 que le résultat suivant qui généralise les espaces pseudo- $\mathcal{M}$ -compacts ($[I_1]$) :

3.6.5. Proposition (Buchwalter).— Soit T un espace complètement

régulier; les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) T est pseudoreplet;
- b) toute famille localement finie d'ouverts (disjoints) non vides de T est modérée.

On en trouvera, là encore, la démonstration dans $[B_7]$.

3.6.6. Proposition.- Pour un espace complètement régulier les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $\nu_u(T \times T) = \nu_u T \times \nu_u T$;
- b) T est uniformément pseudoreplet et $p_T : T \times T \rightarrow T$ est z -fermé.

D'après 3.4.8, la condition a) entraîne " p_T est z -fermé ". D'autre part, soit $d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ un écart continu, il est prolongeable à $\nu_u(T \times T)$ et par suite il est uniformément continu par la structure induite par $\nu_u T \times \nu_u T$ sur $T \times T$; la ν -uniformité de T est donc la structure uniforme universelle, et $\Theta_u T = \nu_u T$.

La réciproque n'est qu'un cas particulier de :

3.6.7. Théorème.- Soient T et X deux espaces complètement réguliers uniformément pseudoreplets; les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) p_T et p_X sont z -fermés ;
- b) $\nu_u(T \times X) = \nu_u T \times \nu_u X$.

La propriété b) est conséquence de a) d'après 3.4.8. Réciproquement, on a $\Theta_u(T \times X) = \Theta_u T \times \Theta_u X$, d'après 3.4.9, donc $\Theta_u(T \times X) = \nu_u T \times \nu_u X$; en particulier $\Theta(T \times X)$ est replet et $\nu(T \times X) = \nu T \times \nu X$; d'autre part les identités $\Theta_u(T \times X) \rightarrow \nu_u(T \times X) \rightarrow \nu_u T \times \nu_u X$ sont uniformément continues, d'où le résultat.

Cette dernière proposition constitue une première généralisation du théorème de Glicksberg-Frolik. Cependant si les deux conditions précédentes entraînent bien que $T \times X$ est uniformément pseudoreplet, il ne nous a pas été possible d'établir la réciproque qui donnerait la véritable généralisation de ce théorème.

Annexe.

Ecart et précompactologies.

Le parallélisme étroit entre espaces topologiques complètement réguliers et espaces précompactologiques complètement réguliers incite à étudier les écarts $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définis sur une espace précompactologique $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$.

Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ deux tels espaces; la famille $(P \times Q)_{(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}}$ engendre, sur l'ensemble produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, une précompactologie, dite précompactologie produit, qui fournit bien entendu la solution du problème universel du produit direct dans la catégorie $\mathcal{UP}$.

A.O. Proposition. - Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ deux espaces précompactologiques complètement réguliers; alors :

$$\kappa(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \kappa\mathcal{X} \times \kappa\mathcal{Y}.$$

En effet, soient u et v des structures uniformes compatibles sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$; pour la structure produit $u \times v$, le complété $\widehat{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ n'est autre que $\widehat{\mathcal{X}} \times \widehat{\mathcal{Y}}$. Par suite $\bigcup P \times Q = \bigcup \widehat{P} \times \bigcup \widehat{Q} = \kappa\mathcal{X} \times \kappa\mathcal{Y}$; comme tout précompact de la précompactologie produit est contenu dans un $P \times Q$, on a par ailleurs $\kappa(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \bigcup P \times Q$.

Un écart $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sera dit précompactologique si c'est

un morphisme précompactologique pour la précompactologie produit sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Supposons maintenant $\mathcal{X}$ complètement régulier, et soit u une structure uniforme sur $\mathcal{X}$ induisant sur chaque P la structure u_P . Si $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est un écart uniformément continu pour la structure uniforme produit, sa restriction $d|_{P \times P}$ est uniformément continue pour la structure uniforme induite sur $P \times P$, qui est évidemment la structure produit de u_P (transitivité des structures initiales). Donc d est un écart précompactologique.

A.1. Proposition.— Toute structure uniforme sur $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ compatible avec la précompactologie $\mathcal{P}$, est définie par une famille $\mathcal{D}$ d'écarts précompactologiques.

Comme d'habitude on peut supposer ces écarts bornés.

On en déduit, comme pour les topologies, que la famille de tous les écarts précompactologiques définit une structure uniforme u_0 sur $\mathcal{X}$ plus fine que toute structure uniforme compatible. Par ailleurs, si d est un écart précompactologique, $d|_{P \times P}$ est un écart uniformément continu sur P , pour la structure $u_P \times u_P$; l'ensemble des $d|_{P \times P}$, pour d parcourant l'ensemble des écarts précompactologiques, définit donc sur P une structure uniforme moins fine que u_P . Comme elle est également plus fine on a établi :

A.2. Théorème.— L'ensemble des écarts précompactologiques (bornés) sur un espace précompactologique complètement régulier $(\mathcal{X}, \mathcal{P})$ définit sur $\mathcal{X}$ la plus fine structure uniforme (séparée) compatible avec la précompactologie .

On appellera cette structure la structure uniforme universelle sur $\mathfrak{X}$. Soient Y un espace uniforme séparé et $f : \mathfrak{X} \rightarrow Y$ un morphisme précompactologique; soit d un écart définissant la structure uniforme de Y ; $d_0(f, f)$ est un écart précompactologique sur $\mathfrak{X}$ donc f est uniformément continue pour la structure universelle de $\mathfrak{X}$. En particulier $\mathcal{U}(\mathfrak{X}; u_0) = \mathcal{CP}(\mathfrak{X})$.

L'ensemble $\mathcal{D}$ des écarts précompactologiques est évidemment saturé, donc la structure uniforme universelle s'obtient également comme structure de $\mathcal{K}$ -convergence sur $\mathcal{CP}(\mathfrak{X})$, où $\mathcal{K}$ est l'ensemble des parties $H \subset \mathcal{CP}(\mathfrak{X})$ telles que pour tout $P \in \mathcal{P}$, $H|P$ soit uniformément équicontinu.

A.3. Proposition.- La topologie induite sur $\mathfrak{X}$ par la structure uniforme universelle est celle de $p_R \mathfrak{X}$.

Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue pour cette topologie. Pour tout point $x_0 \in \mathfrak{X}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un écart précompactologique d et un $\alpha > 0$, tels que $d(x_0, x) < \alpha$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$; or si on pose $g(x) = d(x_0, x)$, g est un morphisme précompactologique de $\mathfrak{X}$ dans $\mathbb{R}$, tel que $|g(x) - g(x_0)| < \alpha$ implique $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ce qui montre que f est continue de $p_R \mathfrak{X}$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs la topologie sous-jacente à u_0 est plus fine que celle de $p_R \mathfrak{X}$, et comme elles sont toutes deux complètement régulières, le résultat est acquis.

A.4. Corollaire.- Toute partie $H \in \mathcal{K}$ est équicontinue dans $\mathcal{C}(p_R \mathfrak{X})$.

On remarquera que la proposition A.3 est le pendant précompactologique du fait que la précompactologie canonique d'un

espace topologique complètement régulier se définit aussi bien par la structure uniforme universelle que par la u -uniformité.

Désignons maintenant par $u'_u \mathcal{X}$ (resp. $\theta'_u \mathcal{X}$) le complété de $\mathcal{X}$ pour la structure uniforme de $p_R \mathcal{X}$ (resp. pour la structure u_0). On obtient une suite d'inclusions ensemblistes :

$$\mathcal{X} \longrightarrow \kappa \mathcal{X} \longrightarrow \theta'_u \mathcal{X} \longrightarrow u'_u \mathcal{X} .$$

On ne sait pas cependant si les précompactologies induites sur $\mathcal{X}$ par $\theta'_u \mathcal{X}$ (resp. $u'_u \mathcal{X}$) coïncident avec la précompactologie initiale. .

On notera enfin que la propriété $\mathcal{X} = \kappa \mathcal{X}$ exprime que tous les "précompacts" de $\mathcal{X}$ sont relativement compacts, ce qui est l'analogue de la condition $T = T''$ pour les espaces topologiques $([B_6])$.

Bibliographie.

Ouvrages.

- [B₁] N.Bourbaki, Topologie Générale, ch.1-2, 4-ème édition.
- [B₂] N.Bourbaki, Topologie Générale, ch.10, 2-ème édition.
- [D] J.Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston 1966.
- [G.J] L.Gilman and M.Jerison, Rings of continuous functions,
Van Nostrand, N.Y. 1960.
- [G.Z] P.Gabriel et M.Zisman, Calculus of fractions and homotopy
theory, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [I₁] J.R.Isbell, Uniform spaces, Math.Surveys n°12, A.M.S, 1964.
- [K] J.L.Kelley, General Topology, Van Nostrand, N.Y. 1955.
- [M₁] B.Mitchell, Theory of Categories, Acad.Press, N.Y. 1965.

Articles et Séminaires.

- [A] R.Arens, A topology for spaces of transformations, Ann.
of Math. 47 (1946) p.480-495.
- [A.D] R.Arens and J.Dugundji, Topologies for functions spaces,
Pac.J.Math. 1 (1951) p.5-31.
- [B₃] B.Banaschewski, On the Weierstrass-Stone approximation
theorem, Fund.Math. 44 (1957) p.249-252.
- [B₄] R.Brown, Ten topologies for $X \times Y$, Quat.J.Math.Oxford,
(2) 14 (1963) p.303-319.
- [B₅] H.Buchwalter, Topologies, bornologies et compactologies,
Thèse Doctorat, Lyon, 1968.
- [B₆] H.Buchwalter, Topologies et compactologies, Pub.Dep.Math.
Lyon, 6 (1969) n°2, p.1-74.

- [B₇] H.Buchwalter, Problèmes de complétion topologique, Cours de DEA 1969-70, Notes d'Enseignement du Dép. de Math. Lyon (à paraître).
- [B.J] N.Blanchard et M.Jourlin, La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues, Pub.Dép.Math.Lyon, 6 (1969) n°2, p.85-96.
- [B.P] H.Buchwalter et R.Pupier, Une caractérisation topologique de la complétion universelle d'un espace complètement régulier, C.R.Acad.Sc.Paris, 268 (1969) p.1534-1536.
- [B.Y] R.N.Bagley and J.L.Yang, On k-spaces and functions spaces, Proc.Am.Math.Soc. 17 (1966) p.703-705.
- [C₁] D.E.Cohen, Spaces with weak topology, Quat.J.Math.Oxford, (2) 5 (1954) p.77-80.
- [C₂] W.W.Comfort, On the Hewitt realcompactification of a product space, Trans.Am.Math.Soc. 131 (1968) n°1, p.107-118.
- [C.N] W.W.Comfort and S.Negrepontis, Extending continuous functions on $X \times Y$ to subsets of $\beta X \times \beta Y$, Fund.Math. 59 (1966) p.1-12.
- [F] Z.Frolik, The topological product of two pseudocompact spaces, Czechos.Math.J 10 (1960) p.339-348.
- [G₁] G.C.Gould, A Stone-Čech-Alexandrov type compactification and its relation to measure theory, Proc. London Math.Soc. (3) 14 (1964) p.221-244.

- [G₂] J. de Groot, An isomorphism principle in general topology,
Bull.Am.Math.Soc. 73 (1967) n°3, p465-467
- [H] A.W.Hager, Projections of zero-sets, Trans.Am.Math.Soc.
140 (1969) p.87-94.
- [I₂] T.Isiwata, Mappings and spaces, Pac.J.Math. 20 (1967)
n°3, p.455-480.
- [M₂] E.Michael, Local compactness and cartesian products of
quotients maps and k-spaces, Ann.Inst.Fourier
18 (1969) n°2, p.281-286.
- [M.N] M.G.Murdesghvar and S.A.Naimpally, Semi-Hausdorff spaces,
CanadMath.Bull. 9 (1966) p.353-356.
- [N₁] N.Noble, Product with closed projections, Trans.Am.Math.
Soc. 140 (1969) p.381-391.
- [N₂] N.Noble, Ascoli theorem and the exponential map, Trans.
Am.Math.Soc. 143 (1969) p.393-411.
- [N₃] N.Noble, Products of quotients maps and spaces with weak
topologies, à paraître.
- [N₄] N.Noble, A note on z-closed projections, Proc.Am.Math.
Soc. 23 (1969) n°1, p.73-76.
- [P₁] R.Pupier, Sur les catégories complètes, Pub.Dép.Math.Lyon,
2 (1965) n°2, p.1-65.
- [P₂] R.Pupier, Objets convenables, objets de Kelley; applica-
tion aux espaces topologiques, Rev.Roum.Math.
Pures et Appl. 14 (1969) n°4, p.525-532.
- [P₃] R.Pupier, Quelques propriétés de la complétion universelle
d'un espace complètement régulier, C.R.Acad.

Sc.Paris, série A, 269 (1969) p.186-189.

- [P₄] R.Pupier, La complétion universelle d'un produit d'espaces complètement réguliers, Pub.Dép.Math.Lyon, 6 (1969) n°2, p.75-84.
- [P.R₁] R.Pupier et A.Roux, Espaces de Kelley et espaces de de Groot, Séminaire de Top.Gén. Lyon, 1967-68.
- [P.R₂] R.Pupier et A.Roux, Une caractérisation des espaces localement compacts, C.R.Acad.Sc.Paris, série A, 266 (1968) p.910-911.
- [S₁] Z.Semadeni, Injectivity, Projectivity and Duality, Rozprawy Math. Polska, n°35 (1963).
- [S₂] E.Spanier, Quasi-topologies, Duke Math.J. 30 (1963) n°1 p.1-14.
- [S₃] R.C.Steinlage, On Ascoli theorem and the product of k-spaces, non publié.
- [S₄] R.M.Stephenson Jr., Product spaces for which the Stone-Weierstrass theorem holds, Proc.Am.Math.Soc. 21 (1969) n°2, p.284-288.
- [T] H.Tamano, A note on the pseudocompactness of the product of two spaces, Mem.Col.Sc.University Kyoto, 33 (1960) p.225-230.
- [W₁] S.Warner, The topology of compact convergence on continuous functions spaces, Duke Math.J 25 (1958) p.265-282.
- [W₂] A.Wilanski, Between T_1 and T_2 , Am.Math.Monthly, 74 (1967) n°3, p.261-266.

Vu et approuvé.
le Directeur de l'U.E.R. de
Mathématiques,

Jean Braconnier

J. BRACONNIER

Vu
Les Membres du Jury,

Jean Braconnier
(pour lui et p.o. pour
J. Colmez).

Vu et accordé le permis d'imprimer
LYON, le 1er avril 1971

Buchwalter
Colmez
MM. BRACONNIER
COLMEZ
BUCHWALTER
COMBET
HOGBE NLEND

Le Président de l'Université Claude
Bernard,

J. Boidin
J. BOIDIN

